بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال هفتم، شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۷

شمارهٔ پیاپی: ۱۴

تصویر پشت جلد: فواد سزگین، پژوهشگر تاریخ علوم دورهٔ اسلامی

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۲۰.۰۰۰ تومان

روایت هندی محاسبهٔ سینوس ۱ درجه به روش تقریب تکراری جمشید کاشانی[1]

کیم پلوفکر[2]
مریم زمانی[3]

چکیده

ورود مثلثات سینوس‌ها از خاستگاهش در اخترشناسی هندی به جهان اسلام در هزارهٔ نخست میلادی و بازگشتش به هند در نیمهٔ دوم این هزاره، تعامل شناخته شده‌ای شامل برخی موارد جالب و مطالعه نشده است. این مقاله روشی از سده‌های میانه برای تقریب مقدار جِیب (Rsin) را در تحریری به زبان سانسکریت که ظاهراً مربوط به دربار جی سینگ در اوایل قرن هجدهم میلادی است، بررسی می‌کند.

مقدمه: محاسبهٔ مقادیر تابع برای هر درجه به روش مثلثاتی

تا پیش از بسط عبارت‌های سری‌های توانی در حوالی میانهٔ هزارهٔ دوم، سنجش توابع مثلثاتی زاویه‌ها یا کمان‌های دلخواه به انتخاب متغیر تابع بستگی داشت. مقادیر وتر یا جیب (یعنی مقادیر $\sin x$ در دایرهٔ مثلثاتی به شعاع R، که مقدار R واحد نیست) برای زاویه‌های معلوم °۳۰ ، °۴۵ و °۶۰، دست کم بسته به دقت مقادیر معلوم ثابت‌های گنگی چون $\sqrt{2}$ یا $\sqrt{3}$ با روش‌های هندسی ساده‌ای محاسبه می‌شد. اتحادهای مثلثاتی چون دستورهای نصف زاویه یا مجموع و تفاضل، امکان محاسبهٔ مقادیر دیگر تابع را با این مقادیر پایه می‌دهند. برای مقدارهای دیگر ریاضی‌دانان ناچار به استفاده از درون‌یابی خطی (یا در مواردی درون‌یابی مرتبه‌های بالاتر) یا دیگر دستورهای تقریب بین مقادیر معلوم در جدول‌های مثلثاتی بودند.

کهن‌ترین جدول‌های وتر از یونان باستان، شامل مقادیر وتر برای هر درجه یا نیم درجهٔ کمان، در

1. Plofker, Kim, “An Indian Version of al-Kāshī’s Method of Iterative Approximation of sin 1°”, *Gaṇita Bhāratī* 39, no. 2, 2017, pp. 95-106.

۲. تاریخ‌نگار ریاضیات هند، plofkerk@union.edu

۳. کارشناس ارشد تاریخ علم، مدرس تاریخ ریاضیات در دانشگاه گیلان maryam_zamani77@yahoo.com

مجسطی بطلمیوس موجود است. اما کمان 3° کوچک‌ترین کمان قابل ترسیم هندسی است (با نصف کردن مکرر 72° و 60° و با اتحاد تفاضل دو زاویه). به علت ناممکن بودن تثلیث زاویه[1]، وتر زاویهٔ یک درجه ($\mathrm{Crd}\,1^\circ$) مستقیما قابل دستیابی نیست ولی با نامساوی زیر که پیشینیان هم آن را می‌دانستند، تقریب پذیر است. برای $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$:

$$\frac{\mathrm{Crd}\alpha}{\mathrm{Crd}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{Crd}\alpha}{\alpha} < \frac{\mathrm{Crd}\beta}{\beta}$$

با دوبار استفاده از قاعدهٔ نصف زاویه برای وتر معلوم سه درجه، نامساوی دوگانهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\mathrm{Crd}\,\frac{3^\circ}{2}}{\frac{3}{2}} < \frac{\mathrm{Crd}\,1^\circ}{1} < \frac{\mathrm{Crd}\,\frac{3^\circ}{4}}{\frac{3}{4}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\mathrm{Crd}\frac{3^\circ}{2} < \mathrm{Crd}\,1^\circ < \frac{4}{3}\mathrm{Crd}\frac{3^\circ}{4}$$

بطلمیوس برای یافتن اندازهٔ وتر 1° در دایره‌ای به شعاع ۶۰ ، مقدار شصتگانی $1;2,50$ (معادل $1+\frac{2}{60}+\frac{50}{3600}$) را مشترکاً برای حد پایینی و بالایی وتر یک درجه محاسبه کرد. مقدار بطلمیوس و روشی که برای استخراج وتر یک درجه به کار برد، همواره در قرن‌های پس از آن به صورت منبعی برای مقادیر این کمیت در مثلثات یونانی و یونانی-اسلامی درآمد.

وتر و سینوس کمان یا زاویهٔ θ در دایره‌ای به شعاع R با دستور «نصف وتر دوبرابر زاویه» به هم مربوطند.

$$R\sin\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Crd}\,(2\theta)$$

مقادیر جیب در مثلثات هند باستان، گرچه به ظاهر در آغاز از محاسبهٔ وتر در یونان باستان ملهم بود، به صراحت شامل مقادیر تابع مثلثاتی به ازای 1° یا برهان نامساوی دوگانه برای تقریب زدن مقدار آنها نیست. جدول‌های مثلثاتی ثبت شده با حروف در متن‌های منظوم نجومی یا زیج‌های سانسکریت تنها شامل جیب‌های ترسیم‌پذیر ۲۴ مضرب صحیح اول از $3^\circ 45'$ تا 90° و بر اساس درون‌یابی خطی برای یافتن بقیهٔ مقادیر جیب است.

در برخی آثار سانسکریت برای تسهیل کاربری و از بر کردن، «لاگو» یا جدول‌های نجومی ساده که تنها شامل چند مقدارند، عرضه شده است. رسالهٔ واتشوَرَسیدهانتا[2] تألیف ۹۰۴م، جدول جیب ۹۶ مضرب صحیح کمان $56'15''$ ربع اول را می‌دهد (ظاهراً حاصل از دوبار نصف کردن $3^\circ 45'$ و با استفاده از دستور نصف زاویه) که تا حدی نامتعارف است. اما کهن‌ترین جدول موجود مقادیر

۱. تثلیث زاویه در حالت کلی پاسخ ندارد اما برای زاویه های خاص امکان پذیر است.

2. *Vaṭešvarasiddhānta*

جیب برای مقادیر صحیح درجه در راجمرگانکا[1]، کتابچه‌ای شامل جداول از اوایل قرن دهم میلادی، آمده است که در آن‌جامقادیر شعاع دایره و جیب یک درجه عبارتند از: R=۱۰۰۰ و $R\sin ۱^\circ = ۱۷;۲۷$.

هم‌چنین بخش "استخراج جیب" (جیوتپاتی[2]، ابیات ۱۶ تا ۱۷) از رسالهٔ سیدهانتا شیرومنی[3] تألیف بهاسکاراچاریا در حدود ۱۱۵۰م شامل محاسبهٔ مقادیر تابع‌های مثلثاتی همهٔ درجات است.

स्वगोऽङ्केषुषडंशेन वर्जिता भुजशिञ्जिनी
कोटिज्या दशभिः क्षुण्णा त्रिसप्तेषुविभाजिता ॥
तदैक्यमग्रजीवा स्यादन्तरं पूर्वशिञ्जिनी

جیب کمان [θ] به اندازهٔ یک ۶۵۶۹ام خودش کاهش یافته؛ جیب متمم آن ده برابر شده [و] بر ۵۷۳ تقسیم شده است. مجموعشان برابر با جیب کمان بعدی ($\mathrm{arc}\,\theta + ۱^\circ$) و تفاضلشان برابر با جیب کمان قبلی ($\mathrm{arc}\,\theta - ۱^\circ$) است.

این دستورها هم ارز اتحادهای جمع و تفاضل برای یافتن سینوس زاویهٔ مفروض به علاوه یا منهای یک درجه است.

$$\sin(\theta \pm ۱^\circ) = \sin\theta \,.\, \frac{۶۵۶۸}{۶۵۶۹} \pm \cos\theta \,.\, \frac{۱۰}{۵۷۳}$$

دستورهای بالا مقادیر زیر را برای سینوس و کسینوس یک درجه به دست می‌دهند:

$$\sin ۱^\circ \approx \frac{۱۰}{۵۷۳} \approx ۰.۰۱۷۴۵۲۰$$ (مقدار امروزی ≈ ۰٫۰۱۷۴۵۲۴)

$$\cos ۱^\circ \approx \frac{۶۵۶۸}{۶۵۶۹} \approx ۰.۹۹۹۸۴۷۸$$ (مقدار امروزی ≈ ۰٫۹۹۹۸۴۷۷)

رسالهٔ سیدهانتا شیرومنی توضیح نمی‌دهد که بهاسکارا چگونه این مقادیر را یافته است، اما شایان ذکر است که تقریب جبری سینوس توسط بهاسکارای اول مشهور دقت کم‌تری دارد ([۱۱] و [۳] را ببینید).

$$\sin ۱^\circ \approx \frac{۴(۱)(۱۸۰-۱)}{۴۰۵۰۰-۱(۱۸۰-۱)} = \frac{۷۱۶}{۴۰۳۲۱} \approx ۰.۰۱۷۷۵۷۵۰$$

$$\cos ۱^\circ \approx \frac{۴(۸۹)(۱۸۰-۸۹)}{۴۰۵۰۰-۸۹\,(۱۸۰-۸۹)} = \frac{۳۲۳۹۶}{۳۲۴۰۱} \approx ۰.۹۹۹۸۴۵۷$$

1. *Rājamṛgāṅka*
2. *jyotpatti*
3. *Siddhānta śiromaṇi*

از تاریخچهٔ پیشرفت هندیان در ابداع روش‌های محاسبهٔ بسیار دقیق کمیت‌های مثلثاتی، به ویژه سری‌های توانی که در مکتب مَداوا[1] در منطقهٔ کرالا از اواخر سدهٔ ۱۴م به بعد ابداع و تشریح شد، بسیار بیش از این می‌توان گفت. اما در ادامهٔ این مقاله بر آزمودن روش تقریب خاصی برای سینوس ۱° در مثلثات دورهٔ اسلامی و اقتباس بعدی از آن در هند تمرکز می‌کنیم.

روش کاشانی برای تقریب سینوس یک درجه

از آنچه گفته شد پیداست که یافتن مقادیر تابع در مثلثات سده‌های میانه برای همهٔ درجات کمان اساساً به دانستن اندازهٔ مقدار سینوس ۱° وابسته بود و از طرفی روش مبتنی بر نامساوی دوگانه که بطلمیوس برای وتر ۱° به کارگرفت دقت محدودی دارد. در قرن نهم هجری جمشید کاشانی در سمرقند روش دیگری بر اساس دستوری هم‌ارز اتحاد سینوس ۳α مطرح کرد:

$$\sin(۳\alpha) = ۳\sin\alpha - ۴\sin^{۳}\alpha$$

دستور کاشانی در دایرهٔ مثلثاتی به شعاع ۶۰ چنین است:

$$R\sin(۳\alpha) = ۳R\sin\alpha - \frac{۴}{R^{۲}}(R\ \sin\alpha)^{۳}$$

اگر α را ۱° بگیریم پس $۳\alpha = ۳°$ و چنان که در بالا آمده، کوچک‌ترین زاویهٔ صحیحی است که مقدار مثلثاتی‌اش را می‌توان به دقت دلخواه به روش هندسی ترسیم کرد. اگر بگیریم $x = R\sin ۱°$، آنگاه:

$$R\sin ۳° = ۳x - \frac{۴x^{۳}}{۳۶۰۰}$$

بنابراین:

$$x = \frac{۴x^{۳} + ۳۶۰۰\times R\sin ۳°}{۳\times ۳۶۰۰} = \frac{x^{۳} + ۹۰۰\times R\sin ۳°}{۲۷۰۰} = \frac{x^{۳} + ۱۵,۰\ \times\ R\sin ۳°}{۴۵,۰}$$

این معادلهٔ درجهٔ سوم با روش‌های شناخته شدهٔ زمانهٔ کاشانی حل شدنی نبود. اما با دانستن اینکه:

$$R\sin ۳° \approx ۳;\ ۸,۲۴,۳۳,۵۹,۳۴,\ ...$$

و بنابراین:

$$x = \frac{x^{۳} + ۴۷,۶;۸,۲۹,۵۳,\ ...}{۴۵,۰} = \frac{x^{۳} + ۲,۶;۸,۲۹,۵۳,\ ...+۴۵,۰}{۴۵,۰}$$

کاشانی کم و بیش چنین استدلال کرد:

---

1. Madhava

چون می‌دانیم که مقدار صحیح $R\sin ۱^\circ$ یا x یک است، می‌توانیم فرض کنیم کـه $x^۳ \approx ۱^۳$ و یک را از دو طرف معادله بکاهیم:

$$x-۱ \approx \frac{۱^۳}{۴۵,۰}+\frac{۲,۶;۸,۲۹,۵۳,\ldots}{۴۵,۰}$$
$$=\frac{۲,۷;۸,۲۹,۵۳,\ldots}{۴۵,۰}$$
$$=۰;۲+\frac{۳۷;۸,۲۹,۵۳,\ldots}{۴۵,۰}$$

سپس دومین رقم شصتگانی را با فرض $x^۳ \approx (۱;۲)^۳$ و کاستن $(۱;۲)$ از طرفین می‌یابیم:

$$x-۱;۲ \approx \frac{(۱;۲)^۳}{۴۵,۰}+\frac{۳۷;۸,۲۹,\ldots}{۴۵,۰}$$
$$=۰;۰,۴۹+\frac{۰;۲۹,۴۲,\ldots}{۴۵,۰}$$

تقریب بعدی $x^۳ \approx (۱;۲,۴۹)^۳$ است و به همین روش می‌توانیم هر چند رقـم شصـتگانی کـه بخواهیم پیدا کنیم.

خلاصه‌تر بگوییم، اگر تقریب n ام برای $R\sin ۱^\circ$ با n رقم شصتگانی را چنین بنویسیم:

$$x_n \approx ۱;a_۱,a_۲,\ldots,a_n,$$

رقم $(n+۱)$ ام یعنی $a_{n+۱}$ را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$a_{n+۱} \approx x-x_n \approx \left[\frac{۶۰^n \times ((x_n)^۳+۹۰۰\,(R\sin ۳^\circ)-۲۷۰۰\cdot x_n)}{۲۷۰۰}\right]$$

و تقریب جدید $x_{n+۱}$ به صورت زیر در می‌آید:

$$x_{n+۱}=x_n+\frac{a_{n+۱}}{۶۰^n}$$

جمشید کاشانی به این روش مقدار دقیقی برای $R\sin ۱^\circ$ به دست آورد که چنین آغاز می‌شود:

$$R\sin ۱^\circ \approx ۱;۲,۴۹,۴۳,۱۱,۱۴,۴۴,۱۶,\ldots$$

رسالهٔ خود کاشانی در مورد روش محاسبهٔ جیب یک درجه گـم شـده اسـت ولـی بسـیاری از نویسندگان بعدی این روش را حفظ و بررسی کرده‌اند. از بین آن‌ها نویسندهٔ رساله‌ای عربی از قرن نهم یا دهم است به نام رسالة في استخراج جیب درجة واحدة بأعمال مؤسسة علی قواعد حسـابیة

وهندسیة علی طریقة غیاث الدین الکاشی[۱] (رساله در یافتن سینوس یک درجه با عملیات حسابی و هندسی به روش جمشید کاشانی).[۲] این رساله غالباً به قاضی زادهٔ رومی کـه هـم‌عصـر و همکـار کاشانی در رصدخانهٔ سمرقند بود و به دیگر اخترشناسان رصدخانهٔ سـمرقند در اوایـل سـدهٔ دهـم هجری، الغ بیگ، علی قوشچی و عبدالعلی بیرجندی نسبت داده شده است.

روش کاشانی با رویکرد آمیختهٔ جبری و هندسی برای یـافتن وتـر ۲° در دایـره‌ای بـه شـعاع ۶۰ واحـــد، وتـــر قابـــل ترســـیم ۶° را ۶;۱۶;۴۹;۷;۵۹;۸;۵۶;۲۹;۴۰ واحـــد و نتیجـــه را ۲;۵;۳۹;۲۶;۲۲;۲۹;۲۸;۳۲;۵۲;۳۳ واحد یافته که نصف حاصل مقدار $R\sin ۱^\circ$ است. توجـه کنید که به علت ارتباط سینوس و وتر، روش تکرار در مورد وتر و جیب تقریباً یکی است:

$$
\begin{aligned}
R\sin(۳\alpha) &= ۳R\sin\alpha - \frac{۴}{R^۲}(R\sin\alpha)^۳\\
\frac{۱}{۲}\,\mathrm{Crd}(۶\alpha) &= \frac{۳}{۲}\,\mathrm{Crd}(۲\alpha) - \frac{۴}{R^۲}\,\frac{\mathrm{Crd}^۳(۲\alpha)}{۸}\\
\mathrm{Crd}(۶\alpha) &= ۳\,\mathrm{Crd}(۲\alpha) - \frac{\mathrm{Crd}^۳(۲\alpha)}{R^۲}\\
\mathrm{Crd}(۲\alpha) &= \frac{\mathrm{Crd}^۳(۲\alpha)}{۳R^۲} - \frac{\mathrm{Crd}(۶\alpha)}{۳}\\
&= \frac{\mathrm{Crd}^۳(۲\alpha) + ۳۶۰۰\,\mathrm{Crd}(۶\alpha)}{۱۰۸۰۰}
\end{aligned}
$$

در نتیجه اگر بگیریم $y = \mathrm{Crd}\,۲^\circ$ و تقریب nامش با n رقم کسری شصتگانی را به صورت زیـر نشان دهیم:

$$y_n \approx ۱;\, a_۱, a_۲, \ldots, a_n,$$

می‌توانیم همانند قبل رقم $(n+۱)$ ام آن را به صورت زیر بنویسیم:

---

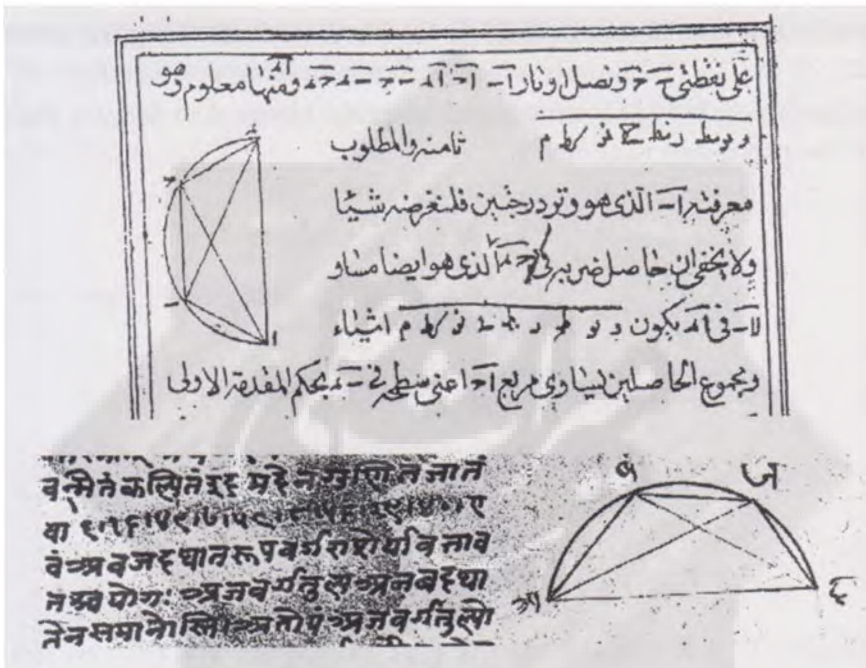
۱. رسالة في استخراج جیب درجة واحدة را مرکز پژوهشی میراث مکتوب با تصحیح، ترجمه و تحقیق فاطمه سوادی در سال ۱۳۸۷ چاپ کرده است.

۲. رسالهٔ وتر و جیب اثر غیاث الدین کاشانی به جا نمانده، اما قاضی زادهٔ رومی شرحی بر این رساله نوشته و عبدالعلی بیرجندی هم در شرح زیج الغ بیگ خلاصه‌ای از رسالهٔ کاشانی را آورده است (قربانی، ابوالقاسم، کاشانی‌نامه، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸، ص ۱۵۴- ۱۵۹). از دیگر رساله‌های نوشته شده دربارهٔ این موضوع رساله‌ای است به نام "در استخراج جیب یک درجه" به فارسی از مؤلفی ناشناس بر اساس شرح قوشچی بر زیج الغ بیگ و رسالهٔ جیب درجهٔ واحدة از قاضی زادهٔ رومی که با شرح و تصحیح فاطمهٔ سوادی با عنوان «رساله‌ای فارسی دربارهٔ محاسبهٔ جیب یک درجه» در شمارهٔ ششم مجلهٔ تاریخ علم (۱۳۸۷)، ص ۶۹- ۱۰۴ چاپ شده است. هم‌چنین میرزا ابوتراب نطنزی از ریاضی دانان عصر محمد شاه رساله‌ای در تثلیث زاویه نوشته است که در آن برای یافتن جیب یک درجه همان روش کاشانی با ترسیم هندسی بیان شده است. این رساله با تصحیح فاطمهٔ دوست قرین با عنوان «رسالهٔ میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویه» در شمارهٔ ۸ مجلهٔ تاریخ علم (۱۳۸۸)، ص ۱ -۲۹ به چاپ رسیده است.

$$a_{n+۱} = y - y_n \approx \left[\frac{۶۰^n \, ((y_n)^۳ + ۳۶۰۰\,(\mathrm{Crd}\,۶^\circ) - ۱۰۸۰۰\, y_n)}{۱۰۸۰۰} \right]$$

و تقریب جدید $y_{n+۱}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$y_{n+۱} = y_n + \frac{a_{n+۱}}{۶۰^n}$$



شکل ۱: توضیح ارتباط بین وترهای °۶ و °۲ در نموداری هندسی برای محاسبهٔ جیب یک درجه به روش کاشانی. بالا: عبارت عربی با مقدار وتر °۶ به حروف ابجد. پایین: روایت سانسکریت با نمایش مقدار وتر °۶ به توسط رقم‌های "ناگَری".

روایت سانسکریت روش کاشانی برای محاسبهٔ وتر°۲

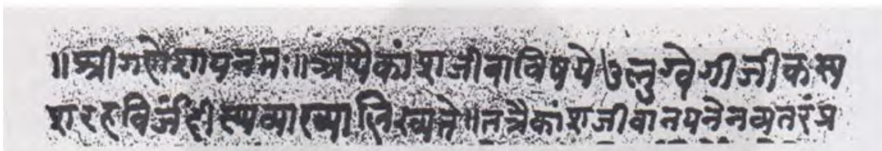
اخیراً در مقاله‌ای [۸]، نسخه‌ای خطی معرفی شد که احتمالاً مربوط به دورهٔ حکومت جی سینگ/جایا سیمهای[1] دوم در اوایل قرن ۱۸م در جیپور و شامل ترجمهٔ سانسکریت رسالهٔ عربی مذکور در بالاست. این ترجمهٔ سانسکریت که احتمالاً به وسیلهٔ نایانا سوکا[2]، اخترشناس دربار جی سینگ،

1. Jayasimha
2. Nayanasukha

انجام شده است کاملاً از اصل عربی پیروی می‌کند و چنان‌که حروف ابجد روی نقاط نمودار شکل ۱ نشان می‌دهند، حتی نمودارهایشان هم با هم مطابقت دارند. جملهٔ آغازین نشان داده شده در شکل ۲ شامل اشارهٔ مترجم به متن اصلی است:

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥ अथैकांशजीवाविषये उलुग्वेगीजीकस्य शरहविर्जंदीस्थव्याख्या लिख्यते ॥

درود بر ایزد گانشا. اکنون توضیحات در شرح بیرجندی بر زیج الغ بیگ، دربارهٔ سینوس یک درجه نوشته می‌شود.

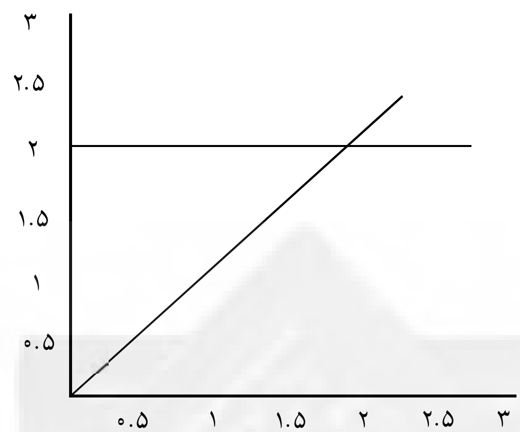


شکل ۲: آغاز ترجمهٔ سانسکریت متن منسوب به بیرجندی (برگ اول ر نسخه).

گرچه مطالعه و ترجمهٔ این اقتباس سانسکریت هنوز به پایان نرسیده است، یک نکتهٔ جالب در اینجا ذکر می‌شود. پس از توصیف وفادارانهٔ روش بیان شده برای تعیین ارقام وتر مجهول 2°، مترجم روش مستقیم‌تری با استفاده از یک دستور سادهٔ تکرار پیشنهاد می‌کند که ترجمه‌اش چنین است:

> اکنون برای تعیین مقدار وتر دو درجه روش دیگری را عابده مطرح کرده است که [در ادامه] می‌آوریم:
> واحدها بر (ضریب) وتر دو درجه تقسیم و مکعب خارج قسمت محاسبه می‌شود. دوباره مکعب بر (ضریب) وتر دو درجه تقسیم می‌شود. خارج قسمت جدید باید به نخستین خارج قسمت افزوده شود. باز مکعب آن محاسبه و همین عمل تکرار می‌شود.
> یعنی با شروع از واحدها یا مقدار عددی معلوم ,...;۵۹;۷;۴۹;۱۶;۶= $\mathrm{Crd}\,6^\circ$، آن را بر ضریب وتر ۶ درجه یعنی ۳ تقسیم می‌کنیم تا نخستین خارج قسمت به دست آید. مکعبش باز بر ۳ تقسیم می‌شود. نتیجه به نخستین خارج قسمت افزوده می‌شود. سپس مکعب مقدار جدید دوباره بر ۳ تقسیم و به وتر 6° اضافه و این کار همچنان تکرار می‌شود.

به بیان دیگر، این همان روش تقریب تکراری برای یافتن وتر 2α بیان شده در بالاست. با تقریب اولیه به صورت $y_0 = 0 = \mathrm{Crd}\,2^\circ$، عمل را تکرار می‌کنیم:



شکل ۴: تابع تکرار $y_{n+1} = \frac{(y_n)^3}{10800} + \frac{(\mathrm{Crd}\,6^\circ)}{3}$ خط $y = x$ را در مقدار $\mathrm{Crd}\,2^\circ$ قطع می‌کند.

$$y_{n+1} = \frac{(y_n)^3}{3\times 60^2} + \frac{\mathrm{Crd}\,6^\circ}{3}$$

تا جایی که $\mathrm{Crd}\,2^\circ$ معلوم شود.

این روش عملاً تندتر از روش رقم به رقم اصلی همگرا می‌شود. مثلاً تقریب $\mathrm{Crd}\,2^\circ$ به جای هفت رقم شصتگانی درست، تنها پس از پنج تکرار به دست می‌آید. تابع تکرار درجهٔ سوم در شکل ۴ دیده می‌شود و چون خط $y = x$ را تقریباً افقی قطع می‌کند، تقریب‌های متوالی را به سرعت به نقطهٔ ثابت تقاطع می‌رساند. تحلیل کامل این اثر و منابع دورهٔ اسلامی آن مستلزم مطالعهٔ گسترده‌تری در مورد تعامل بین نجوم بین سانسکریت (جیوتیشا) و علم نجوم عربی/فارسی در دربار شاهان سده‌های ۱۱ و ۱۲ هجری در هند است.

منابع

1- Asger Aaboe, “al-Kāshī’s iteration method for the determination of $\sin 1^\circ$”, *Scripta Mathematica*, vol. 20, 1954, pp. 24-29.

2- J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, 2nd ed., Springer, New York, 2016.

3- R. C. Gupta, “On derivation of Bhāskara I’s formula for the sine”, *Gaṇita Bhāratī*, vol. 8, 1986, pp. 39-41.

4- Takanori Kusuba, “Bīrjandī: ‘Abd al-‘Alī ibn Muḥammad ibn Ḥusayn al-Bīrjandī”, in Thomas Hockey et al., eds., *Biographical Encyclopedia of Astronomers*, Springer, New York, 2007, p. 127.

5- Takanori Kusuba and David Pingree, *Arabic Astronomy in Sanskrit: Al-Bīrjandī on Tadhkira II, Chapter 11 and its Sanskrit Translation*, Brill, Leiden, 2002.

6- Clemency Montelle and Kim Plofker, *Sanskrit Astronomical Tables*, Springer, Switzerland, 2018.

7- Kim Plofker, *Siddhanta-karaṇa* conversion: Some algorithms in the *Grahagaṇitādhyāya* of Bhāskara's *Siddhāntaśiromaṇi* and in his *Karaṇakutūhala*, *Gaṇita Bhāratī* 38 (2), 2016, pp. 93-110.

8- Kim Plofker, "The influence of Bhāskarācārya's works in 'westernized' Sanskrit mathematical traditions", *Gaṇita Bhāratī*, vol. 37 (1-2), 2015 (issued March 2016), pp. 97-109.

9- Boris Rosenfeld and Jan P. Hogendijk, "A mathematical treatise written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* 15, 2003, pp. 25-65.

10- Bāpūdeva Śāstrī, ed., The *Siddhāntaśiromaṇi* (rev. Gaṇapati Deva Śāstrī, Kashi Sanskrit Series 72), Chaukhambha Sanskrit Sansthan, Varanasi, 1989.

11- Shailesh Shirali, "The Bhāskara-Āryabhaṭa approximation to the sine function", *Mathematics Magazine*, April 2011, pp. 98-107.

12- K. S. Shukla, *Vaṭeśvarasiddhānta and Gola of Vaṭeśvara*, 2 vols., Indian National Science Academy, New Delhi, 1986.

13- Glen Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press NJ, 2009.

14- Glen Van Brummelen, Clemency Montelle, and Kim Plofker, *An Arabic commentary on the sines of Ulugh Beg and its 18th-century Sanskrit version*, forthcoming.