ما صحه گذاشت.

در این شماره از آینه میراث ویژه تاریخ علم نیز تلاش کرده‌ایم که مقالات ارزشمندی تقدیم خوانندگان مجله کنیم.

تلاش ما در این شماره بیشتر به معرفی آثار دانشمندان اسلامی معطوف گشته است، بویژه دانشمندانی که از ایران عزیز برخاسته‌اند.

یقین داریم این مقالات دقیق و ارزشمند نه تنها نقشی اساسی در خودباوری مسلمانان ایفا خواهند کرد، بلکه مردم تمدّنهای دیگر را نیز بیش از پیش با تمدنی درخشان اسلامی آشنا خواهند نمود.

خداوند مهربان را برای چنین خدمتی سپاسگزاریم و از او می‌خواهیم که ما را در راهی که در پیش گرفته‌ایم همراهی فرماید.

نیز از همه کسانی که ما را در چاپ این شماره یاری کرده‌اند به ویژه مدیر محترم مجلهٔ آینهٔ میراث آقای اکبر ایرانی تشکر می‌کنیم.

جعفر آقایانی چاوشی

مقایسهٔ روشهای ابوالوفای بوزجانی، لئوناردو داوینچی و آلبرش دورر در ترسیم پنج‌ضلعی منتظم*

جعفر آقایانی چاوشی

پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات

و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله پس از ذکر مطالبی درباره خواص پنج‌ضلعی منتظم و روش ترسیم آن با خطکش و پرگار روشهای ابوالوفای بوزجانی و لئوناردو داوینچی و آلبرش دورر را برای رسم این شکل مورد تحلیل قرار داده و پس از بیان نقاط ضعف و قوت هر یک از آنها، زیباترین آنها را معرفی می‌نمائیم.

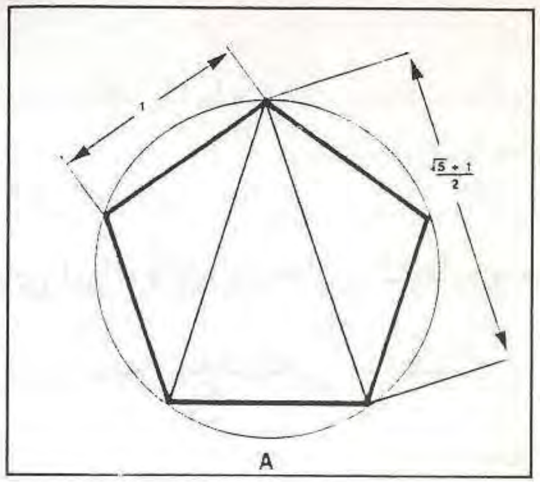
کلید واژه‌ها

پنج‌ضلعی منتظم؛ عدد طلایی؛ ابوالوفای بوزجانی؛ لئوناردو داوینچی؛ آلبرش دورر؛ ترسیم زیبا

مقدمه

آشنایان با هندسه می‌دانند که نسبت قطر پنج‌ضلعی منتظم به ضلع آن برابر با عدد ϕ یا «عدد طلایی» است ــ عددی که گویی با شهود زیباشناسی آدمی آمیخته است و هرگاه در آثار هنری و یا معماری بکار رود زیبایی را در آن آثار به ارمغان می‌آورد. همین رابطه با عدد زیبایی است که پنج‌ضلعی منتظم را در هاله‌ای از تقدس و اسرار فرو برده است.

* این مقاله متن سخنرانی نویسنده است که در دومین همایش ملی ایرانشناسی در اول دی‌ماه ۱۳۸۳ در تهران ایراد کرده است.



شکل۱

بی‌جهت نیست که این شکل هندسی را پیروان مکتب فیثاغورس در دوهزار و پانصد سال پیش نماد مذهبی خود قرار داده و آن را مقدّس می‌شمرده‌اند.

ملل دیگر نیز از چشم‌اندازهای دیگری به این شکلِ پر راز و رمز نگریسته و بفراخور حال خود از آن بهره گرفته‌اند. از همین روست که هندسه‌دانان و یا هنرمندان این ملتها برای ترسیم این شکل روشهایی ارائه داده‌اند ــ روشهایی با خطکش و پرگار تا بتوان به‌آسانی آن را رسم کرد. ما در این مقاله سه روش مختلف رسم پنج‌ضلعی منتظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از این روشها متعلق به ابوالوفای بوزجانی ریاضیدان ایرانی است و دو روش دیگر به دو هنرمند اروپایی یعنی داوینچی و دورر تعلق دارند.

غرض اصلی از ارائه این سه روش مقایسه فنی این روشهاست تا نقاط ضعف و قوت هر یک شناخته شده و در نتیجه زیباترین ترسیم آشکار گردد.

لازم به یادآوری است که در هندسه، ترسیمی را زیبا می‌نامیم که دارای حداکثر دقت و حداقل عملیات ترسیمی باشد. در این مقاله پس از اشاره‌ای به خواص پنج‌ضلعی منتظم به مطلب اصلی یعنی مقایسه سه روش ترسیم آن، خواهیم پرداخت.

۱- خواص پنج‌ضلعی منتظم

۱-۱ امکان ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با خطکش و پرگار

پنج‌ضلعی منتظم، همانطوری که بعداً به اثبات آن خواهیم پرداخت، با خطکش و پرگار قابل

ترسیم است. به‌همین جهت است که اقلیدس نیز روشی با استفاده از همین آلات، برای ترسیم آن ارائه داده که در کتاب اصول او مندرج است.

۱-۲ وجود در طبیعت

پنج‌ضلعی منتظم جزو معدود اشکال هندسی است که به‌وفور در طبیعت یافت می‌شود.

این شکل را مخصوصاً می‌توان در میان بسیاری از ستارگان دریایی و گلها مشاهده کرد.

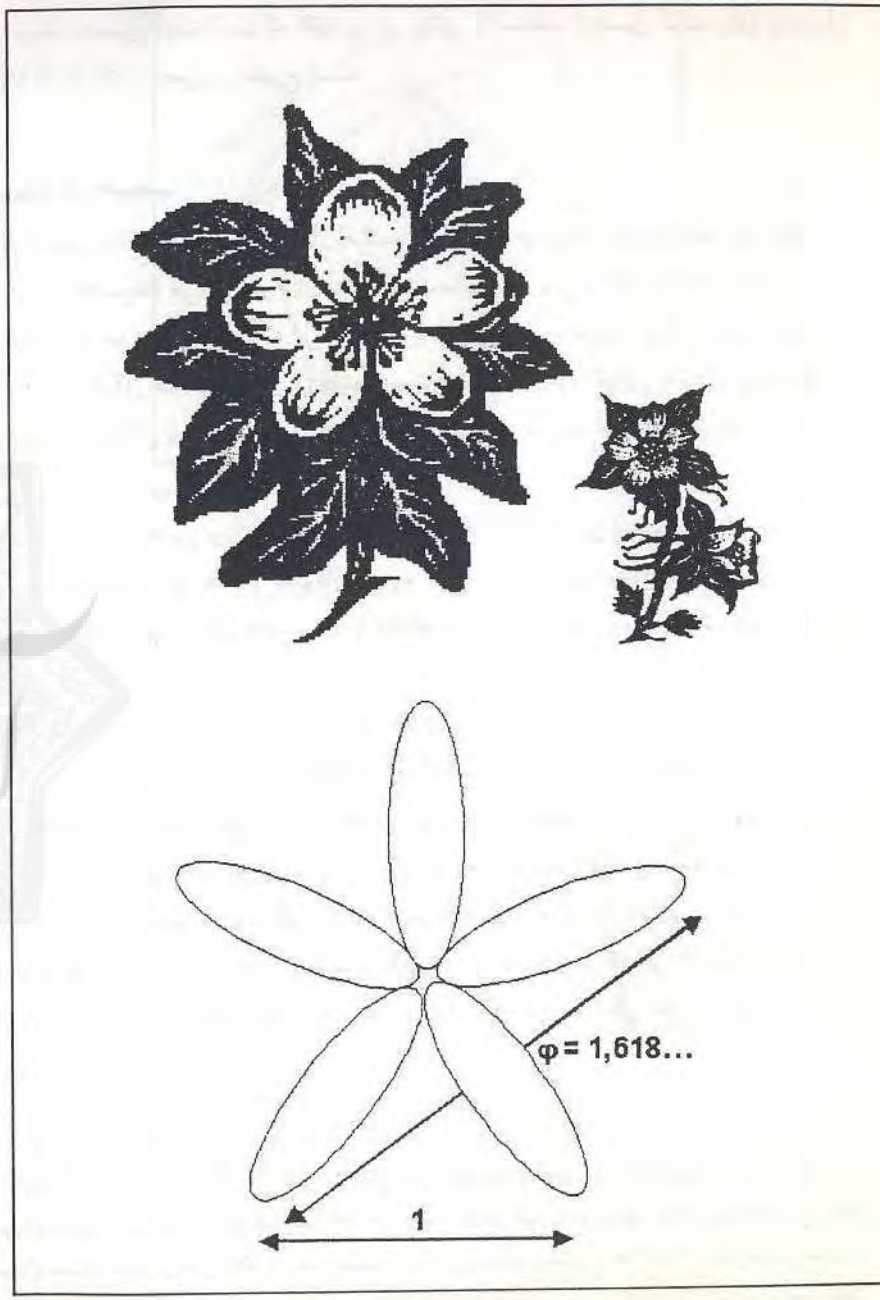
علت این امر بر ما پوشیده است، با این حال ابوریحان بیرونی ریاضیدان بزرگ ایرانی نظریه زیر را بویژه درباره شکل هندسی گلها بیان داشته است به نظر او وجود گلهایی به‌شکل پنج‌ضلعی از ترسیم‌پذیری این شکل با خطکش و پرگار سرچشمه می‌گیرد. مگر نه آنست که طبیعت ساده‌ترین راه را برمی‌گزیند. او می‌نویسد:

«در میان گلها بعضی **ویژگیها موجود است که واقعاً شگفت‌انگیز است. به‌عنوان مثال تعداد گلبرگهایی که رئوس آنها هنگام شکوفایی دایره می‌سازند، اغلب از قوانین هندسی متابعت می‌کنند. معمولاً گلبرگها از نظر هندسی نه با مقاطع مخروطی بلکه با وترهای یک دایره مطابقت** دارند.

انسان به سختی می‌تواند گلی بیابد که دارای هفت و یا نُه گلبرگ باشد. علت این امر آن است که نمی‌توان با اصول هندسی (یعنی خطکش و پرگار) درون دایره چنین اشکالی ساخت. شماره گلبرگها، همواره سه، چهار، پنج، شش یا هجده است و در **طبیعت ما اغلب به گلهایی با چنین** ویژگی برخورد می‌کنیم. شاید روزی بتوان گلی با تعداد هفت و یا نُه گلبرگ پیدا کرد. یا در میان انواع گلهایی که تاکنون شناخته شده‌اند گلی با همین تعداد گلبرگ یافت. اما باید اذعان کرد که طبیعت جنس‌ها و گونه‌ها را به همان گونه که هستند نگه می‌دارد.»[۱] از میان گلهایی که شکل پنج‌ضلعی منتظم دارند، گلهایی از خانواده گل سرخ ساده می‌باشند که در زیر شکل یکی از آنها را مشاهده می‌کنیم

۱. عین نوشته بیرونی چنین است: «بلی فی‌خاصیّات‌الزّهر شیء، هو موضع‌التعجب: و هو أن عدد آوراقها، الّتی تحوزُ اطرافها دائرةعند انفتاحها، جار فی‌اغلب‌الامر علی قضایاالهندسة، و موافق فی اکثرالاحوال للاوتار، التی وُجدت بالاصول‌الهندسیه، دون‌القطوع المحروطیه؛ فلا تکاد تحرز هذه من‌الزهر یکونَ عدد أوراقها سبعةاو تسعة، لامتناع عملها بالأصول‌الهندسیّةَ الدائرة بل یکون ثلاثةٌ و اربعةٌ و خمسةو ستةٌ فیٌ و ثمانیةٌ و عشرة؛ و هذا امره اکثر الوجود، و ممکن ان یوجد فی‌الاحایین. جنس للسبعةو التسعة، او یُوجَدَ فی‌خلال الانواع المذکورة. عدةکذالک؛ و ان کانت الطبیعة، تحفظ الاجناسی والانواع ... »

(ابوریحان بیرونی، الاثارالباقیه، تحقیق و تعلیق پرویز اذکائی. تهران، میراث مکتوب ۱۳۸۰ هـ. ش. ص ۳۷۰)

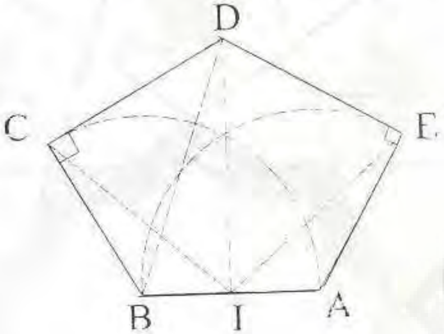


شکل۲ گلی از خانواده گل سرخ ساده

۲- پنج‌ضلعی منتظم در هنرهای تزئینی و معماری اسلامی

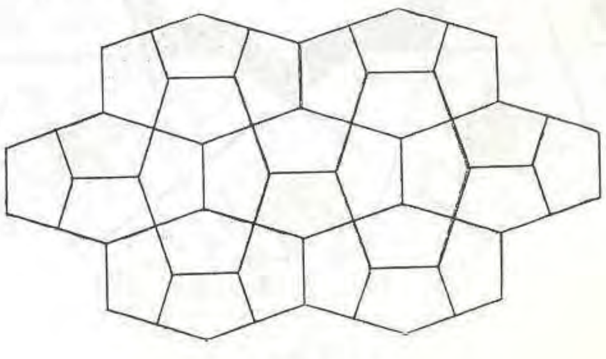
از پنج‌ضلعی‌های منتظم یکنواخت، نمی‌توان در یک کاشیکاری استفاده کرد. شایان ذکر است که: «یک کاشیکاری صفحه، خانواده‌ای از عناصری به نام «کاشی» است که صفحه را بدون شکاف یا بدون اصطکاک می‌پوشانند.»[۲]

برای کاشیکاری با کاشیهای یکنواخت، پنج‌ضلعی، تنها باید از کاشیهای پنج‌ضلعی شبه منتظم بهره برد، که یکی از آنها پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی است که دو زاویه آن قائمه باشد. در شکل زیر این نمونه از کاشیها را مشاهده می‌کنیم. کاشیکاری با این پنج‌ضلعی‌ها را «کاشیکاری



شکل۳

قاهره» می‌نامند، زیرا از این نوع کاشیکاری در قاهره و بعضی از بلاد اسلامی استفاده می‌شود.

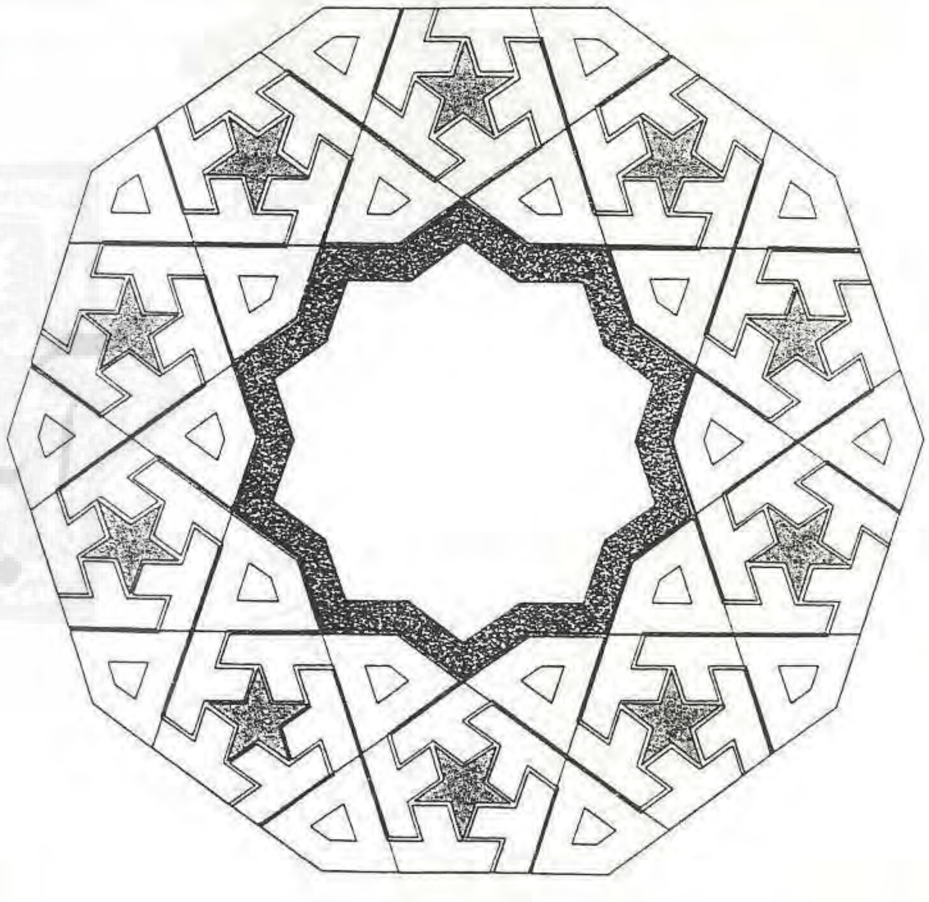


شکل ۴ کاشیکاری قاهره

۲. برانکو گرانبام جفری س. شیفارد «کاشیکاری با چندضلعی‌های منتظم» پیک ریاضی، ترجمهٔ فرهاد خلت ج ۳ شماره ۱ (۱۳۶۷) ص ۳۶

۱-۲ هنرهای تزئینی اسلامی

گرچه از پنج‌ضلعی منتظم در کاشیکاری استفاده نمی‌شود، ولی این شکل در طرحهای روی جلد کتابها و در گچ‌بریهای اسلامی استفاده فراوان دارد. شکل زیر یک طرح تزئینی اسلامی را نشان می‌دهد که از قرارگرفتن ده پنج‌ضلعی منتظم پیرامون یک ده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای تشکیل گردیده است.[۳]

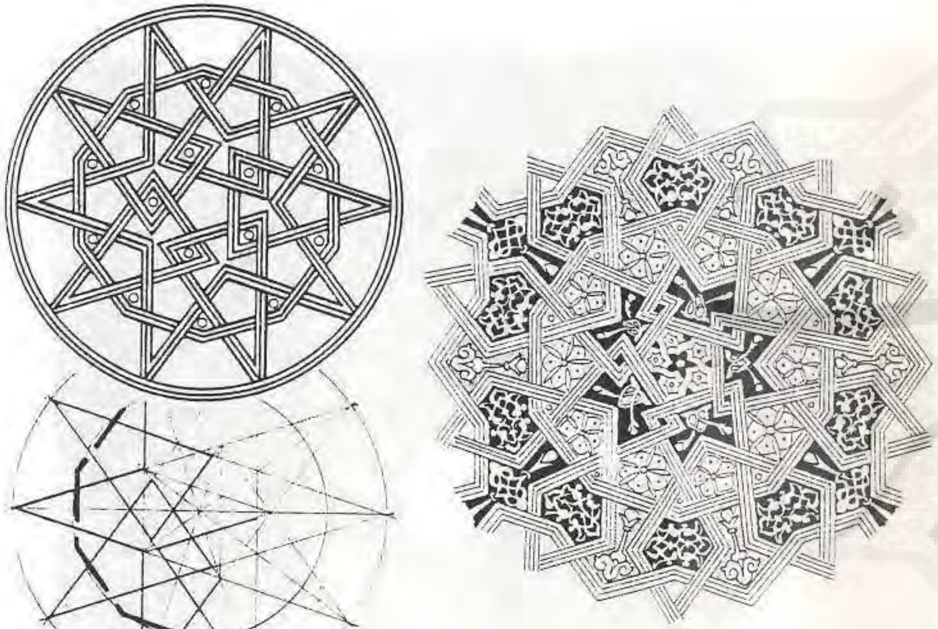


شکل ۵

۳. این شکل از کتاب زیر اقتباس گردیده است:

K. Critchlow, *Islamic Patterns*, Slovenia 1992

نمونه دیگری از این طرحها که با استفاده از پنج‌ضلعی منتظم صورت گرفته، در زیر نشان داده شده است.[۴] از این طرح بیشتر برای تزئین جلد قرآن استفاده می‌شود.



شکل ۶

۴. این طرح از کتاب زیر اقتباس گردیده است:

Eva Wilson, *Islamic Designs*, London 1995 p. 49

۲-۲ معماری اسلامی

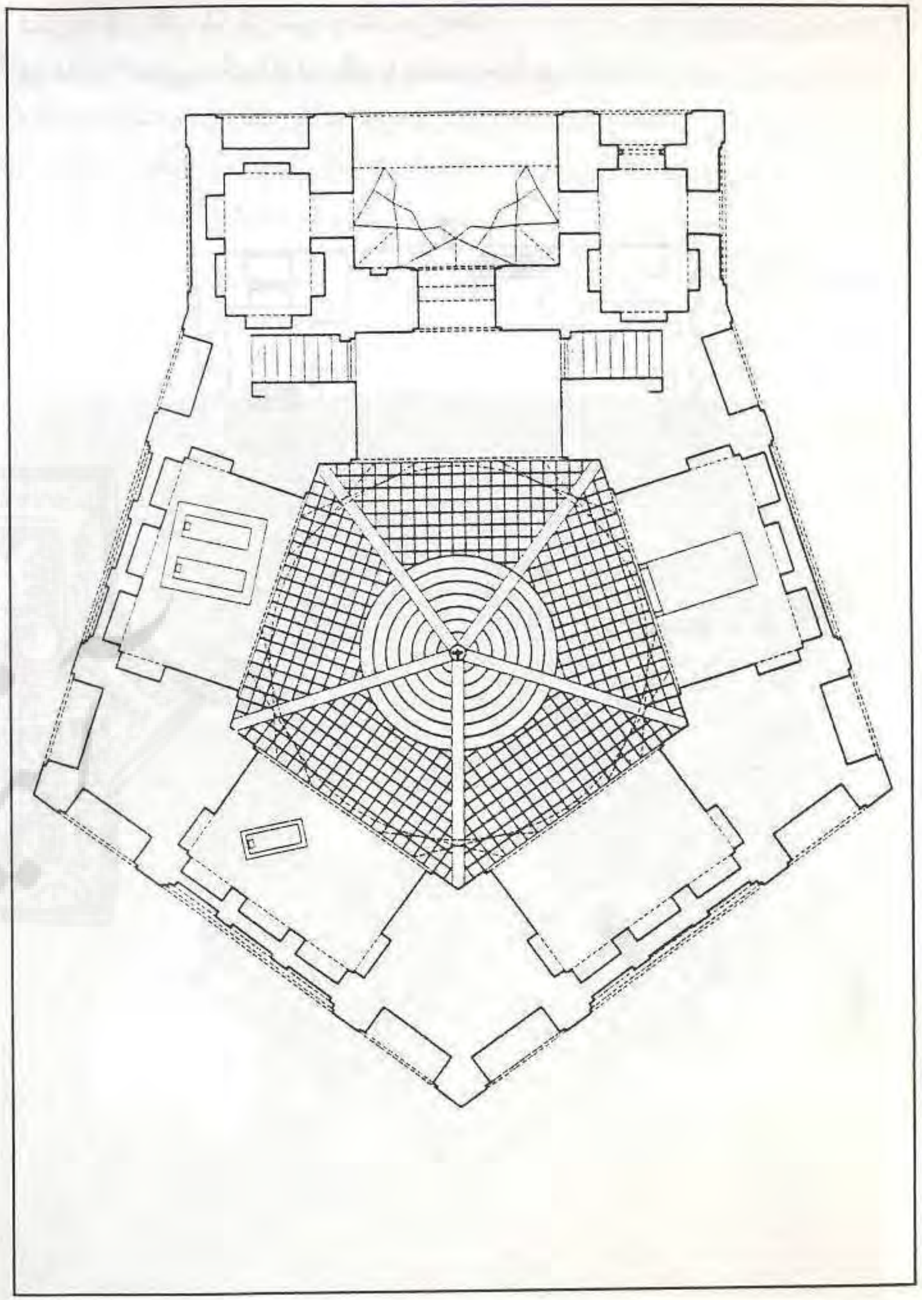
هنوز پژوهشی دربارهٔ استفاده از پنج‌ضلعی منتظم در معماری اسلامی صورت نگرفته است؛ با اینحال می‌توان حدس زد که این شکل از دیرباز مورد توجه معماران مسلمان در کشورهای اسلامی بوده است. در ایران «تکیه بابا رکن‌الدین» در اصفهان به شکل پنج‌ضلعی منتظم می‌باشد. البته همانطوری که در شکل ۷ در پلان این تکیه مشاهده می‌کنیم قبر بابا رکن‌الدین که از عرفای قرن هشتم هجری است در یک ضلع این پنج‌ضلعی قرار دارد.

شکل ۷ مقبره بابا رکن‌الدین در اصفهان

شکل ۸ پلان تکیه بابا رکن‌الدین را نشان می‌دهد.

در شکل ۹ تصویر دیگری از این پلان را مشاهده می‌کنیم.

شکل ۸



شکل ۹ تصویر دیگری از پلان تکیه بابا رکن‌الدین

۲-۳ پنج‌ضلعی منتظم در معماری غیراسلامی

در ممالک غیر اسلامی، پنج‌ضلعی منتظم بیشتر در معماری بکار رفته است. گویی ساکنان این سرزمینها می‌خواسته‌اند تا در میان خانه‌های راست‌گوشه و کنار هم قرارگرفته یکنواخت، ساختمانی بنا کنند که از این یکنواختی خارج گردیده و چشمان را مجذوب خود کند. این است که قصرهای قدیمی و یا مراکز نظامی در غرب بیشتر به شکل پنج‌ضلعی منتظم بوده است.

امروزه نیز بزرگترین مرکز سیاسی آمریکا یعنی پنتاگون، از همین ویژگی برخوردار است که ما تصویری از آن را در زیر مشاهده می‌کنیم.[۵]

شکل ۱۰

۵. این عکس ازکتاب زیرگرفته شده است:

J. L. Heilbron, *Geometry Civilized, History Culture, and Technique,* Oxford 1998

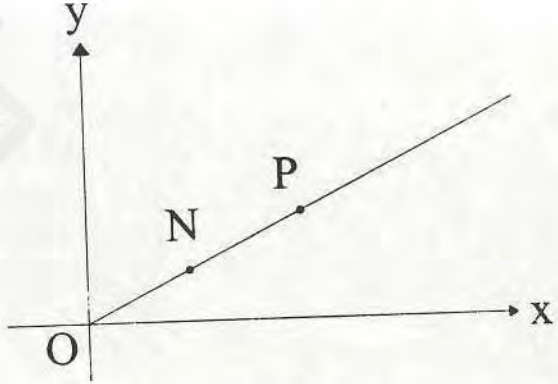
۳- امکان ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار

در این بخش امکانپذیری ترسیم پنج‌ضلعی منتظم را با خط‌کش و پرگار ثابت خواهیم کرد.[۶]
پیش از این کار به چند تذکر مهم به شرح زیر نیازمندیم:

۱-۳ معادله پارامتری یک خط راست

در اینجا تنها به معادلهٔ پارامتری خطوطی که از مرکز مختصات عبور می‌کنند می‌پردازیم فرض می‌کنیم $\overrightarrow{ON}=(a,b)$ بردار واحدی روی پاره‌خط OP باشد (شکل ۱۱).
معادله پارامتری خط OP چنین خواهد بود:

$$OP:\begin{cases} x=at \\ y=bt,\ a^2+b^2=1 \end{cases}$$



شکل ۱۱

طول OP نیز برابر خواهد بود با:

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2t^2+b^2t^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,|t|=|t|$$

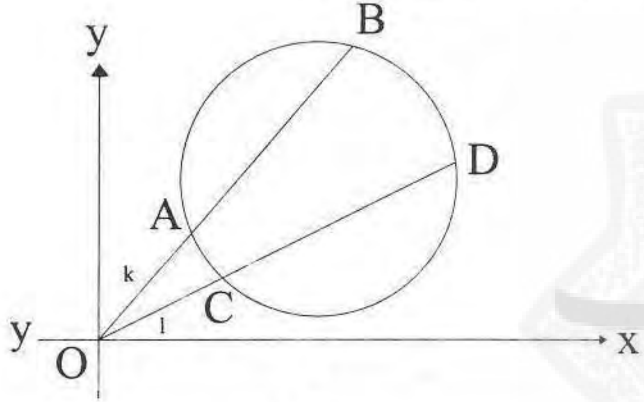
۶. در این بخش از مقاله زیر استفاده کرده‌ایم:
Mikhail Shubor "The Golden section, al-Hazan's Problem, and The Geometry of quadratic equations" *Journal of undergraduate Mathematics*, vol. 24 no. 1 pp. 1-4

۲-۳ قضیه:

هرگاه k و l دو خط مار بر مرکز مختصات باشند و نقاط A و B روی k، و C و D روی l طوری قرار گیرند که داشته باشیم:

$$OA.OB=OC.OD$$

در این صورت چهار نقطهٔ مذکور روی یک دایره‌اند.



شکل ۱۲

اثبات: فرض می‌کنیم که معادلات پارامتری خطوط k و l به‌ترتیب از قرار زیر باشند:

$$\begin{cases} x=at \\ y=bt,\ a^2+b^2=1 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x=ds \\ y=es,\ d^2+e^2=1 \end{cases}$$

بنابراین مختصات هر یک از این نقاط از این قرار است:

$$A=(at_1,bt_1),\ B=(at_2,bt_2),\ C=(ds_1,es_1) \text{ و } D=(ds_2,es_2)$$

در این صورت رابطه $(OA).(OB)=(OC).(OD)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$t_1t_2=s_1s_2$$

حال مختصات این چهار نقطه را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$(x_1, y_1) = (at_1, bt_1), (x_2, y_2) = (at_2, bt_2), (x_3, y_3) = (ds_1, es_1)$$

$$(x_4, y_4) = (ds_2, es_2)$$

شرط اینکه این چهار نقطه روی یک دایره باشند، این است که داشته باشیم:

$$\mathrm{de't}\begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{de't}\,\mathcal{R} = 0$$

یعنی دترمینان ماتریس $\mathcal{R}$ باید برابر با صفر باشد.

در ماتریس $\mathcal{R}$ به‌جای $y_i (i = 1, \cdots 4)$ و x_i مقادیر آنها را جایگزین می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\mathrm{de't}.\mathcal{R} = \mathrm{de't}\begin{pmatrix} t_1^2 & at_1 & bt_1 & 1 \\ t_2^2 & at_2 & bt_2 & 1 \\ s_1^2 & ds_1 & es_1 & 1 \\ s_2^2 & ds_2 & es_2 & 1 \end{pmatrix}$$

حال سطر اول این ماتریس را در t_2 و سطر دوم را در t_1 و سطر سوم را در s_2 و سطر چهارم را در s_1 ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\mathrm{de't}.\mathcal{R} = t_1 t_2 \begin{vmatrix} t_1 & a & b & t_2 \\ t_2 & a & b & t_1 \\ s_1 & d & e & s_2 \\ s_2 & d & e & s_1 \end{vmatrix}$$

این دترمینان را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix} t_1 & a & b & t_2 \\ t_2 & a & b & t_1 \\ s_1 & d & e & s_2 \\ s_2 & d & e & s_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 - t_2 & 0 & 0 & t_2 - t_1 \\ s_1 - s_2 & 0 & 0 & s_2 - s_1 \\ t_1 & a & b & t_1 \\ s_2 & d & e & s_1 \end{vmatrix} = (t_1 - t_2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & s_2 - s_1 \\ a & b & t_1 \\ d & e & s_1 \end{vmatrix} - (t_1 - t_2)\begin{vmatrix} s_1 - s_2 & 0 & 0 \\ t_2 & a & b \\ t_2 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (t_1 - t_2)\,[(s_2 - s_1)(ae - db) - (s_2 - s_1)(ae - db)] = 0$$

بنابراین چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره‌اند.

۳-۳ حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم

معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$$

که در آن a، b و c اعداد حقیقی‌اند در نظر می‌گیریم فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، واضح است که:

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

روی محور yهای دستگاه مختصات نقاط زیر را در نظر می‌گیریم

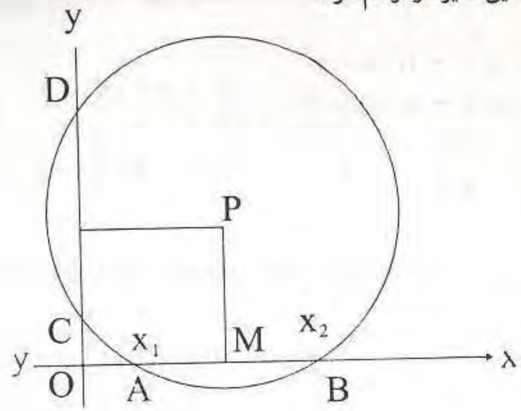
$$C = (0, 1) \text{ و } D = \left(0, \frac{c}{a}\right).$$

همچنین فرض می‌کنیم $B = (x_2, 0)$ و $A = (x_1, 0)$ بوده و M وسط قطعه خط AB باشد. در این صورت داریم: $M = (\frac{-b}{2a}, 0)$ (شکل ۱۰) از آنجایی که:

$$(OA)(OB) = x_1 x_2 = (OC)(OD),$$

پس بنا به قضیهٔ پیشین چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره قرار گرفته‌اند. برای یافتن

ریشه‌های x_1 و x_2 باید این دایره را رسم کرد.



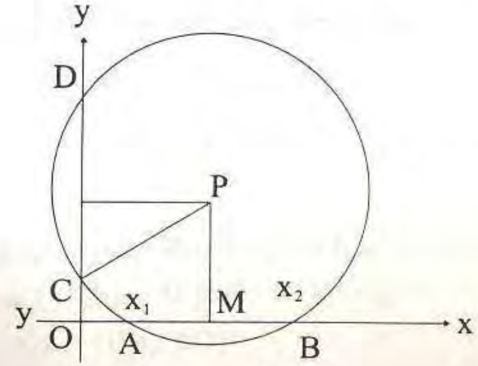
شکل ۱۳

برای این منظور کافی است عمودی از نقطهٔ M بر محور ox رسم کنیم و عمود دیگری از وسط CD روی oy رسم نمائیم. محل تلاقی این دو عمود یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند. حال اگر به مرکز P و به شعاع PC دایره‌ای رسم کنیم، این دایره محور ox را در نقاط x_1 و x_2 قطع خواهند کرد.

بحث

برای اینکه تعیین ریشه‌ها امکانپذیر باشد، باید دایره مطلوب محورهای ox و oy را قطع نماید. به تعبیر دیگر باید داشته باشیم: $PC > PM$. اما مختصات نقطهٔ P چنین است.

$$P = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{2}\left[1+\frac{c}{a}\right]\right)$$



شکل ۱۴

از نامساوی $PC > PM$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \left(1-\frac{a+c}{2a}\right)^2} > \left(\frac{a+c}{2a}\right)$$

این نامعادله پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$b^2 - 4ac > 0$$

هرگاه دایره بر ox مماس باشد. در این حالت $PC = PM$ خواهد بود. در این صورت معادله دارای ریشه مضاعف است:

$$b^2 - 4ac = 0$$

هنگامی که دایره محور ox را قطع نکند در این صورت:

$$b^2 - 4ac < 0$$

و ریشه‌های معادله موهومی خواهند بود.

امکان ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار

هرگاه در دایرهٔ به شعاع واحد پنج‌ضلعی منتظم $A_1A_2\cdots A_5$ را در نظر بگیریم و محور ox را منطبق بر OA_1 انتخاب نمائیم آفیکس‌های (affixe) رئوس این پنج‌ضلعی ریشه‌های معادله زیر می‌باشند:

$$Z^5 - 1 = 0$$

به این معنی که مختصات x و y هر رأس را می‌توان جزء حقیقی و موهومی عدد مختلط Z دانست. یعنی: $Z = x + iy$.

یکی از ریشه‌های این معادله $Z = 1$ آفیکس نقطه A_1 می‌باشد. بنابراین پنج ریشه این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$Z^5 - 1 = (Z-1)(Z^4 + Z^3 + Z + 1) = 0$$

بنابراین پنج ریشه این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z = \cos\theta + i\sin\theta = x_1 + iy_1 \\ Z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = x_2 + iy_2 \\ Z^3 = \cos 2\theta - i\sin 2\theta = x_2 - iy_2 \\ Z^4 = \cos\theta - i\sin\theta = x_1 - iy_1 \end{cases}$$

همانطوری که ملاحظه می‌شود Z^4 مزدوج Z می‌باشد، به همین ترتیب Z^3 مزدوج Z^2 است، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}(Z + Z^5) = x_1 \text{ و } \frac{1}{2}(Z^2 + Z^3) = x_2$$

از طرف دیگر داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(Z + Z^2 + Z^3 + Z^4) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{و } x_1 x_2 = \frac{1}{4}(Z + Z^4)(Z^2 + Z^3) = \frac{1}{4}[Z^3 + Z^4 + Z^6 + Z^7]$$

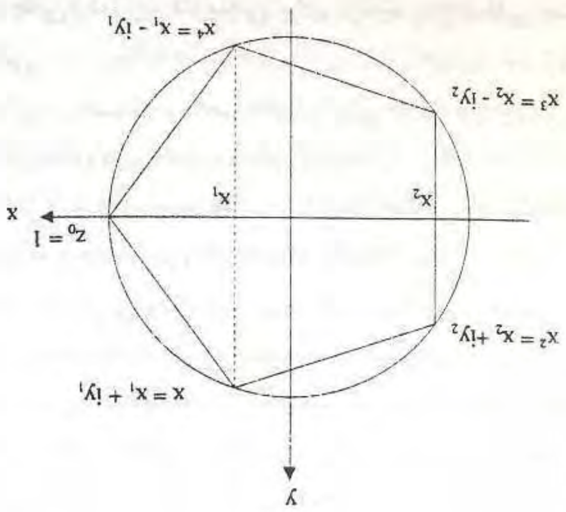
$$= \frac{1}{4}[Z^3 + Z^4 + Z + Z^2] = -\frac{1}{4}$$

پس x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر می‌باشند:

$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

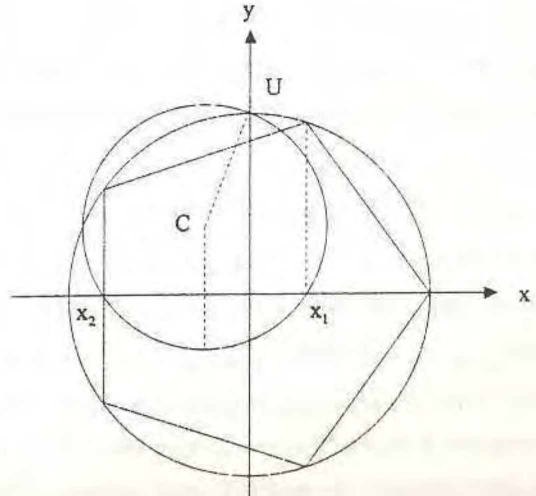
حال برای تعیین x_1 و x_2 به شکل ترسیمی عملیات زیر را انجام می‌دهیم:
فرض می‌کنیم $U = (0, 1)$، بنابراین دایرهٔ به مرکز:

$$C = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{2}\left[1 + \frac{c}{a}\right]\right) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$$



شکل۱۵

و به شعاع CU محور xها را در نقاط: x_1 و x_2 قطع خواهد کرد. عمودهایی از نقاط x_1 و x_2 بر محور xها رسم می‌کنیم تا دایره به شعاع واحد را در چهار نقطه‌ای که چهار رأس پنج‌ضلعی مطلوب می‌باشند، قطع کنند، رأس پنجم نیز روی $(1 , 0)$ قرار دارد.



شکل ۱۶

۴- روشهای بوزجانی، دورر و داوینچی برای ترسیم پنج‌ضلعی منتظم

۱-۴ روش بوزجانی

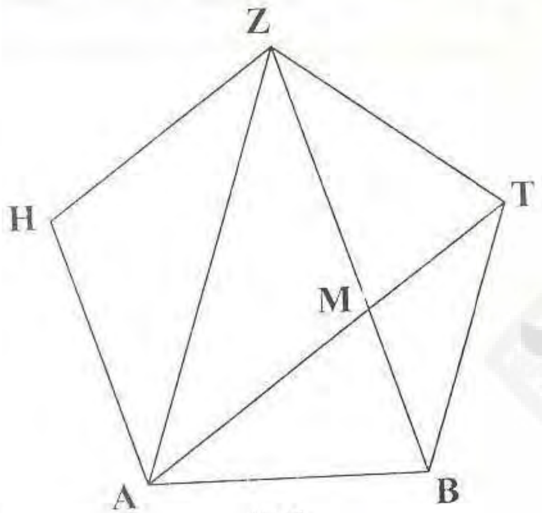
ابوالوفای بوزجانی، ریاضیدان و منجم عالیقدر ایرانی که در قرن چهارم هجری می‌زیسته است، صاحب آثار ارزنده‌ای در ریاضیات و نجوم است.
از جملهٔ این آثار، کتابی است موسوم به نجارت و یا اعمال هندسی که ابوالوفا آن را برای تسهیل کار بنّایان و معمارانی که با هندسه سر و کار داشته‌اند نگاشته است.

از این اثر که به زبان عربی نوشته شده است، دو ترجمهٔ فارسی قدیمی موجود است. این کتاب شامل مباحثی بدیع و مبتکرانه در علم هندسه است. نیز بر اساس این کتاب می‌توان بوزجانی را مبتکر علم هندسه عملی در جهان اسلام نامید. زیرا هندسه‌دانان یونان باستان، تنها به هندسه نظری توجه داشتند و به دلایل فلسفی از کاربرد عملی این علم روی‌گردان بودند. هندسه اقلیدس نمونه بارزی از چنین دیگاهی است. در این اثر مهم هیچگونه نشانه‌ای از کاربرد عملی هندسه وجود ندارد.
در عصر شکوفائی فرهنگ و تمدن اسلامی اگرچه ریاضیدانانی همچون خوارزمی، بنوموسی و ثابت بن‌قره، در آثار هندسی خود، به کاربرد عملی این علم نیز اشاراتی کرده‌اند. با این حال یک اثر منظم و منسجمی در این باب وجو دنداشت. وکتاب بوزجانی نخستین کتابی است که در این زمینه تدوین یافته است.

از نکات ابتکاری دیگر این کتاب انجام یک رشته ترسیمات هندسی با خطکش غیر مندرج و پرگار با دهانه ثابت است. ابوالوفا پرگار با دهانهٔ ثابت را ظاهراً از آن جهت استعمال کرده تا کار بنّایان را به هنگام کار آسان کند و آنها را از باز و بسته کردن مداوم دهانه پرگار بی‌نیاز گرداند. این روش که بعدها در بین معماران و بنایان قدیمی رواج پیدا کرد، بتدریج وارد هندسه نظری نیز گردید و مخصوصاً هندسه‌دانان ایتالیایی عصر رنسانس بدان علاقمند گردیدند، و ترسیمات زیادی را با خطکش و پرگار با دهانهٔ ثابت انجام دادند. این علاقه‌مندی تا آنجا پیش رفت که در قرن نوزدهم میلادی دو هندسه‌دان بزرگ اروپایی یعنی پونسله و اشتینر ثابت کردند که تمام ترسیمات هندسه مقدماتی را حداقل با یک خطکش و یک پرگارِ با دهانه ثابت می‌توان انجام داد.[۷]
از جمله ترسیمات بوزجانی با خطکش و پرگارِ با دهانه ثابت ترسیم پنج‌ضلعی منتظم می‌باشد.

7. J. Victor Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822); Jacob Steiner, *Die geometrischen Konstructionen* ... (Berlin, 1833); M. e. Stark (trans.), R. C. Archibald (ed.), Jacob Steiner's *Geometrical Constructions* ... (New York: *Scripta Mathematica*, 1950).

بوزجانی چون این روش را برای صنعتگران بیان کرده از ارائه برهان خودداری نموده است، حال آنکه ما برای فهم بهتر باید این برهان را بر رسم ابوالوفا اضافه نمائیم.
ترسیم ابوالوفا مبتنی بر مشاهدات هندسی زیر است:
مسئله را حل شده انگاشته، فرض می‌کنیم ABTZH پنج‌ضلعی منتظم مطلوب باشد که اقطار AT و BZ آن در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. نیز فرض می‌کنیم که ضلع AB از این پنج‌ضلعی مساوی a باشد. همانطوری که در شکل مشاهده می‌شود، هرگاه بتوانیم قطر این پنج‌ضلعی را



شکل۱۷

برحسب a بدست آوریم ترسیم آن آسان خواهد شد. دو مثلث BMT و ABT متشابه‌اند، زیرا زوایای یکی از آنها نظیر به نظیر با زوایای آن دیگری برابرند. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{AT} = \frac{BM}{BT} \Rightarrow AB \cdot BT = AT \cdot BM$$

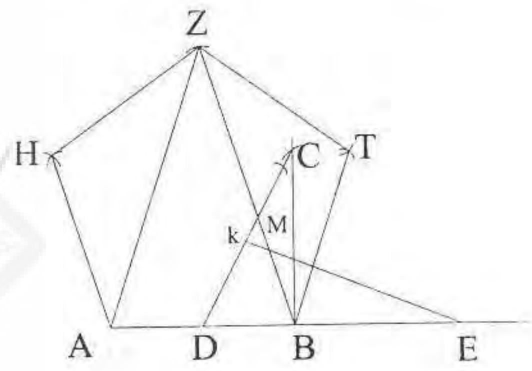
اما $AT = BZ$ و $AB = BT$ می‌باشد.
پس می‌توان رابطهٔ قبلی را به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\overline{BT}^2 = BM \cdot BZ$$

این رابطه نشان می‌دهد که هرگاه قطر یک پنج‌ضلعی منتظم را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم نمائیم، ضلع پنج‌ضلعی قسمت بزرگتر آن خواهد بود.

بنابراین هرگاه طول AB مفروض باشد، مسئله منجر به این می‌شود که روی امتداد AB نقطه‌ای مانند E بیابیم به‌طوری که هرگاه AE را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم AB قسمت اعظم آن گردد.

روش ابوالوفا برای تعیین این نقطه و نیز رسم پنج‌ضلعی منتظم از قرار زیر است: «از نقطهٔ B از ضلع معلوم AB عمود BC را مساوی با AB بر آن اخراج می‌کنیم و نقطهٔ C را به نقطهٔ D وسط AB وصل کرده روی DC طول DS را برابر با AB جدا می‌کنیم. پاره‌خط DS را در نقطهٔ K به دو قسمت مساوی تقسیم می‌نمائیم. از نقطهٔ K عمودی بر DC اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع نماید.[۸]» E همان نقطه مطلوب است که رسم پنج‌ضلعی را آسان می‌کند زیرا دو



شکل۱۸

مثلث BCD و KED برابرند. بنابراین ED = CD از آنجا:

$$\overline{ED}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 = (DE + BD)(DE - BD) = AE \cdot BE$$

با معلوم بودن E مثلث متساوی‌الساقین ABZ را روی ضلع AB می‌سازیم به‌طوری که دو ساق آن AZ و BZ مساوی با AE باشند.

۸. ابوالقاسم قربانی و محمد علی شیخان، بوزجانی نامه، تهران ۱۳۷۱ ص ۴۲

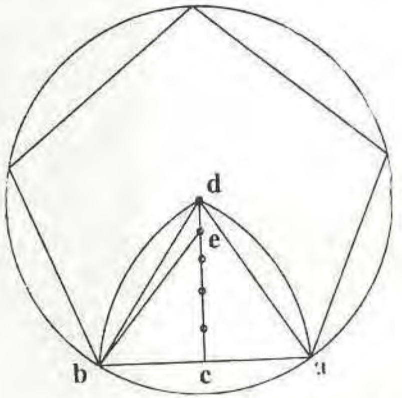
حال با پرگاری که دهانه ثابت آن مساوی AB است به مرکزهای A و Z کمانهایی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در T قطع نمایند. به طریق مشابه کمانهایی به مراکز B و Z رسم می‌کنیم تا نقطه H به‌دست آید ABTZH پنج‌ضلعی مطلوب است.

۲-۴ روش ترسیم لئوناردو داوینچی

لئوناردو داوینچی نقاش و هنرمند برجسته ایتالیایی از کسانی بود که به هندسه علاقه فراوان داشت. از او رساله‌ای در تعلیم هندسه موجود است که شارل هانری (Ch. Henry) در سال ۱۸۸۴ میلادی آن را مورد بررسی قرار داده است. داوینچی در این اثر روش ترسیم پنج‌ضلعی را به‌صورت زیر شرح می‌دهد:

«هرگاه خط ab مفروض باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع adb را رسم کن. c وسط ab را به رأس d وصل نما و آن را به پنج قسمت مساوی تقسیم کن، یک شاخه پرگار را روی e یعنی چهارمین قسمت dc قرار بده و با شاخه دیگر دایره‌ای ترسیم کن، به‌طوری که دو انتهای خط ab را در بر بگیرد. مشاهده خواهی کرد که این خط ضلع پنج‌ضلعی خواهد بود.[۹]»

این ترسیم همان طوری که در زیر ثابت خواهیم کرد. دقیق نیست. یعنی پنج‌ضلعی حاصل یک



شکل۱۹

پنج‌ضلعی منتظم نمی‌باشد.

9. Ch.HeNRY, "Les manuscrits de Léonard de Vinci et son enseignement géométriqu", *Revue de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur*, N° 3 (1884), pp. 118-119

شکل ۲۰ دستور ساخت پنج‌ضلعی منتظم از داوینچی و به خط این هنرمند

اثبات:

نقطه e را به b وصل کرده، فرض می‌کنیم $\overline{eb} = r$ و $\overline{bc} = \alpha$ باشد. در مثلث متساوی‌الاضلاع abd داریم:

$$\overline{dc} = \sqrt{۳}\alpha \Rightarrow \overline{ec} = \frac{۴}{۵}\alpha\sqrt{۳}$$

$$r^{۲} = \alpha^{۲} + \frac{۴۸}{۲۵}\alpha^{۲} \Rightarrow r = \frac{\alpha\sqrt{۷۳}}{۵}$$

با استفاده از این رابطه می‌توان نوشت.

$$\alpha = \frac{r \cdot ۵}{\sqrt{۷۳}}$$

و چون ضلع پنج‌ضلعی برابر با ۲α است پس:

$$۲\alpha = \frac{۱۰r}{\sqrt{۷۳}}$$

هرگاه r شعاع دایره محیطی این پنج‌ضلعی را برابر با واحد بگیریم، خواهیم داشت:

$$۲\alpha = \frac{۱۰}{\sqrt{۷۳}} = ۱,۱۷۰۴۱۱۴$$

حال آنکه اندازه ضلع پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع واحد برابر است با

$$\frac{\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}}{۲} = ۱,۱۷۵۵۷۰۵$$

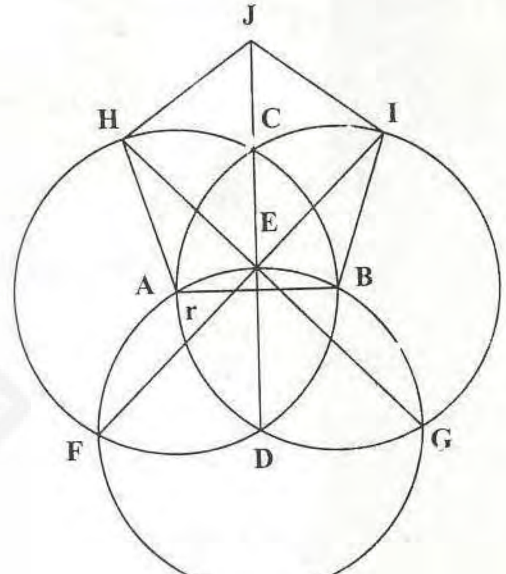
۳-۴ روش آلبرش دورر

آلبرش دورر نیز همانند داوینچی نقاشی بود که به هندسه علاقه فراوان داشت. او کتابی درباره ترسیمات هندسی نوشته که در سال ۱۵۲۵ میلادی در نورنبرگ به چاپ رسیده است.[10] این اثر به زبان فرانسوی نیز ترجمه گردیده است که ما ترسیم پنج‌ضلعی را از آن اقتباس کرده‌ایم. این ترسیم چنین است:

10. Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung mitdem Zirckel und Richtscheyt* (Nürnberg, 1525).

«به شعاع مفروض r و به مراکز A، B و D سه دایره رسم می‌کنیم (D یکی از نقاط تلاقی دو دایره به مراکز A و B می‌باشد) محل تلاقی وتر مشترک دو دایره A و B را E می‌نامیم. مطابق شکل EF و GE را رسم می‌کنیم تا دایره‌های A و B را به‌ترتیب در H و I قطع کنند. A، B، I و H چهار رأس پنج‌ضلعی هستند که رأس پنجم آن یعنی J نیز به‌آسانی بدست خواهد آمد.[11]

پنج‌ضلعی حاصل از این روش نیز یک پنج‌ضلعی منتظم نیست.



شکل۲۱

اثبات:

هرگاه D را به‌عنوان مرکز مختصات بگیریم و فرض کنیم $AB = BI = ۱$ با توجه به حاصلضرب داخلی دو بردار می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB} = \cos \hat{B}$$

11. E. FOURREY, *Procédés originaux de constructions géométriques*, Paris 1924, p. 88. Voir égalcment: Albrech DÜRER, *Géométrie*, présentation et traduction de J. Peiffer. Paris 1995. pp. 207-208.

مختصات نقاط A و B به قرار زیر می‌باشند:

$$A\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) \text{ و } B\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

پس مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با (۰ و ۱). بنابراین $\cos \hat{B}$ مساوی با طول بردار IB روی محور مختصات مفروض خواهد بود. از طرف دیگر نقطهٔ I روی خط EF به معادله $y = x + ۱$ قرارگرفته است.

نقطهٔ I دارای مختصات $(x, x+۱)$ خواهد بود. با ملاحظه به این مطلب مختصات $\overrightarrow{IB}$ را می‌توان چنین نمایش داد:

$$\overrightarrow{IB}\left(\frac{۱}{۲} - x, \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ - x\right)$$

اما بنا به فرض: $|\overrightarrow{IB}| = ۱$

پس می‌توان نوشت:

$$|\overrightarrow{IB}| = \sqrt{\left(\frac{۱}{۲} - x\right)^۲ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ - x\right)^۲} = ۱$$

از حل این معادله برای $x < ۰$ نتیجه می‌شود:

$$x = \frac{\sqrt{۳} - ۱ + \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}$$

اما:

$$\cos \hat{B} = \frac{۱}{۲} - x = \frac{۳ - \sqrt{۳} - \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}$$

پس:

$$\hat{B} = \arccos\left(\frac{۳ - \sqrt{۳} - \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}\right) \Rightarrow \hat{B} = ۱۰۸^\circ ۲۱' ۵۸''$$

حال اگر فرض کنیم $D\hat{J}I = \theta$ داریم:

$$\sin\theta = x = \frac{\sqrt{۳} - ۱ + \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\hat{J} = ۲\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}\right) \Rightarrow \hat{J} = ۱۰۹^{\circ}۱۱'۳۲''$$

در حالی که هر یک از زوایای یک پنج‌ضلعی منتظم مساوی ۱۰۸° است نتیجه:
از این سه ترسیم نتیجه می‌شود که ترسیم ابوالوفا، هم ساده است زیرا که با یک خط‌کش و یک پرگار با دهانه ثابت انجام می‌گردد، و هم دقیق است، چرا که یک پنج‌ضلعی منتظم را بدست می‌دهد. پس ترسیمی است زیبا.

ترسیم دورر از ترسیم ابوالوفا ساده‌تر است لیکن دقیق نیست و تنها یک پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع بدست می‌دهد. ترسیم داوینچی نه سادگی دو روش پیشین را دارد و نه دقت ترسیم ابوالوفا را. این ترسیم یک پنج‌ضلعی منتظم بدست نمی‌دهد.

دگرگونی مفهوم هندسه در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم[۱]

سیاوش شهشهانی

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

چکیده

گذر از یک هندسهٔ مطلق (اقلیدسی) به انواع هندسه‌ها طی چند قرن صورت گرفت. پذیرش هندسه‌های جدید نیاز به یک نگرش اساسی به موضوع ریاضیات به طور عام و موضوع هندسه به طور خاص داشت. این نگرش در قرن نوزدهم صورت گرفت و موجب تحولی در هندسه گردید. در مقالهٔ حاضر استدلال می‌شود که سخنرانی سال ۱۸۵۴ را می‌توان نقطهٔ عطفی در این دگرگونی هندسه قلمداد کرد.

کلید واژه‌ها هندسه اقلیدسی، هندسه نااقلیدسی، فضا زمان، کانت، پیوستار، ریمان، بُعد.

در نیمه دوم قرن نوزدهم دگرگونیهایی بنیادی در دیدگاه ریاضیدانان نسبت به ماهیت وجودی اشیاء مورد بحث در ریاضیات صورت گرفت که نهایتاً در پایان آن قرن و اوایل قرن بیستم منجر به بازسازی اشیاء ریاضی در چارچوب نظریهٔ مجموعه‌های کانتور گردید. طی بیست و چند قرن تاریخ ثبت شدهٔ ریاضیات تا نیمهٔ دوم قرن نوزدهم، ریاضیات اساساً یکی از علوم طبیعی بود هر چند که درجه یقین بی‌همتای دانش ریاضی و مؤثر بودن استثنایی قدرت تعقل در پیشبرد آن، ریاضیات را به حدّی از سایر دانشها متمایز می‌ساخت که افلاطون برای اشیاء

۱. خلاصهٔ سخنرانی در اولین کارگاه تاریخ ریاضیات، ۲۴ ـ ۲۱ مهر ۱۳۸۳، دانشگاه شهید بهشتی، زیراب ـ مازندران.

آینهٔ میراث دورهٔ جدید سال سوم، بهار ۱۳۸۴ (پیاپی ۲۸) ص ۲۹ ـ ۳۴