تا دریافت که کدام متغیر مستقل در جدول المجریطی به کار رفته است. به ویژه، با استفاده از تناسبات تقارنی که با زاویهٔ بعد و تعدیل خورشید مطابقت داشته باشند، ما می‌توانیم این توابع را بر اساس جدول تعدیل زمان به صورت تابعی از طول خورشید دوباره سازی کنیم.

تعیین مجدد زاویه بعد و تعدیل شمسی

همانگونه که در توضیحات بخش پنجم این مقاله آورده شد، تعدیل زمان از دو مؤلفه تشکیل می شود: زاویهٔ بعد و تعدیل شمسی. هر دو این مؤلفه ها شماری از تناسبات تقارنی را ارضا می کنند؛ به ویژه که برای زاویهٔ بعد روابط زیر در دست می‌باشند:

$$\alpha(180 - \lambda) = 180 - \alpha(\lambda) \quad و \quad \alpha(180 + \lambda) = 180 + \alpha(\lambda)$$

این فرمول ها برای هر مقداری از λ به زبان ریاضی بیانگر این هستند که مثلاً زمان طلوع حمل که می توان آنرا $\alpha(30) - \alpha(0)$ محاسبه کرد، برابر است با زمان طلوع سنبله $\alpha(180) - \alpha(150)$ و زمان طلوع میزان $\alpha(210) - \alpha(180)$.

برای تعدیل شمسی به صورت تابعی از طول حقیقی خورشید، به ازای هر مقدار آنومالی حقیقی خورشید a خواهیم داشت:

$$q(\lambda_A + a) = -q(\lambda_A - a) \quad و \quad q(\lambda_A + 180 + a) = -q(\lambda_A + a)$$

همانگونه که در توصیف مدل شمسی در بخش پنجم آمد، λA طول اوج خورشید و $a = \lambda - \lambda_A$ می‌باشد. این فرمول ها به زبان ریاضی بیانگر این هستند که مقدار مطلق تعدیل شمسی فقط بسته به فاصلهٔ خورشید از اوج و یا حضیض می‌باشد، دیگر اینکه علامت معادله در دو طرف خطی که اوج و حضیض را بهم وصل می کند مختلف است.[۱۳]

ما می‌توانیم از تناسبات تقارنی که زاویه بعد برای آنها صدق می کند و همچنین از تعدیل شمسی، مناسباتی را بین مقادیر معینی برای تعدیل زمان به صورت تابعی از طول حقیقی خورشید، اشتقاق نماییم. ابتدا باید توجه داشته باشیم که هر مقدار λ روابط زیر را خواهیم داشت:

$$E(\lambda) = 1/15.(\lambda + q(\lambda - \lambda_A) - \alpha(\lambda) + c)$$

$$\begin{aligned} E(180 + \lambda) &= 1/15.(180 + \lambda + q(180 + \lambda - \lambda_A) - a(180 + \lambda) + c) \\ &= 1/15.(180 + \lambda - q(\lambda - \lambda_A) - 180 - a(\lambda) + c) \end{aligned}$$

۱۳. تعدیل خورشید به مثابهٔ تابعی از طول متوسط خورشید، فقط یک تناسب تقارنی را که مشابه اولین تناسب مذکور در فوق می‌باشد ارضا می‌کند، یعنی $q_m(\lambda_A + a_m) = -q_m(\lambda_A - a_m)$ آنومالی متوسط خورشید $(a_m = \lambda_m - \lambda_A)$ می‌باشد.

$$= 1/15.(\lambda - q(\lambda - \lambda_A) - \alpha(\lambda) + c) \qquad (۶)$$

لذا با اضافه کردن دو مقدار تعدیل زمان برای آرگومنت‌هایی که ۱۸۰ درجه از یکدیگر جدا می‌باشند، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} E(\lambda) + E(180 + \lambda) &= 1/15.(\lambda - q(\lambda - \lambda_A) - \alpha(\lambda) + c + \lambda - q(\lambda - \lambda_A) - \alpha(\lambda) + c \\ &= 1/15.(2\lambda - \alpha 2(\lambda) + 2c) \end{aligned}$$

و از اینجا در می یابیم که

$$\alpha(\lambda) = \lambda + c - 7.1/2.(E(\lambda) + E(180 + \lambda)) \qquad (۷)$$

بدین ترتیب ما می توانیم زاویهٔ بعد را در هر جدول تعدیل زمان به صورت طول حقیقی خورشید دوباره سازی نماییم، مشروط بر اینکه مقدار کمیت c را بشناسیم (و یا مقدار تقریبی مناسبی از آن در دست داشته باشیم).

حال می توانیم از طریق تفریق دو مقدار تعدیل زمان برای آرگومنت‌هایی که ۱۸۰ درجه از یکدیگر جدا هستند، از یک راه مشابه، تعدیل شمسی را دوباره سازی نماییم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E(\lambda) - E(180 + \lambda) &= 1/15.(\lambda + q(\lambda - \lambda_A) - \alpha(\lambda) + c - \lambda + q(\lambda - \lambda_A) + \alpha(\lambda) - c) \\ &= 1/15.(2.q(\lambda - \lambda_A)) \end{aligned}$$

و این منجر می شود به:

$$q(\lambda - \lambda_A) = 7.1/2.(E(\lambda) - E(180 + \lambda)) \qquad (۸)$$

بدینسان می توانیم تعدیل شمسی را که اساس جدول تعدیل زمان را تشکیل می دهد، به صورت تابعی از طول حقیقی خورشید محاسبه نماییم حتی اگر هیچ مقداری برای ثابت دوره c در دست نداشته باشیم.

هیچ یک از فرمول هایی که ما در اینجا اشتقاق کردیم و هیچ یک از فرمول‌های مشابه به آنها، برای تعدیل زمان به مثابه تابعی از طول متوسط خورشید مصداق ندارند. از آنجا که در فرمول ۵ تعدیل شمسی q_m 'مابین' زاویهٔ بعد دیده می‌شود (در جملهٔ $(\alpha(\lambda_m - q_m(\lambda - \lambda_A))$)، این جمله را نمی توان به آسانی حذف نمود، علیرغم اینکه کدام یک از مقادیر تعدیل زمان را اضافه و یا کسر نماییم.

با فرض اینکه جدول خوارزمی، تعدیل زمان را به صورت تابعی از طول حقیقی خورشید ارائه می کند، ما می‌توانیم مقادیر مربوط به تعدیل شمسی را با استفاده از فرمول ۸ دوباره سازی کنیم. من متوجه شده ام که در این صورت مقادیر حاصله، خیلی به مقادیر تعدیل شمسی که بر اساس

خروج از مرکز بطلمیوسی به مقدار ۲;۳۰ و طول اوج تقریباً ۸۴°۴۰ َ محاسبه شده‌اند، نزدیک خواهند بود. تا جائی که من اطلاع دارم، این مقدار آخری تأیید نشده است. اگر طول متوسط خورشید، متغیر مستقل جدول خوارزمی می بود، در آن صورت جدول بازساخته شده واگرائی‌های روشمندی (سیستماتیک) از جداول تعدیل شمسی (برای هر مقدار دلخواه خروج از مرکز و طول اوج)نشان می‌داد. از اینرو می توانیم نتیجه بگیریم که متغیر مستقل جدول خوارزمی، طول متوسط خورشید نمی‌باشد. دلایل بیشتر برای چنین استنتاجی را می توان با بازسازی زاویهٔ بعد که زیربنای جدول تعدیل زمان خوارزمی می‌باشد، از طریق فرمول ۷ بدست آورد. برای انجام چنین کاری می باید ابتدا یک مقدار تقریبی برای ثابت دوره c پیدا کنیم.

محاسبه تقریبی ثابت دوره c

ثابت دوره c را می توان به طور تقریبی از مقادیر جدول تعدیل زمان، در صورتی که تابعی از طول حقیقی خورشید باشد، و با استفاده از تناسبات تقارنی که توسط زاویه بعد و تعدیل شمسی مصداق می یابند، تعیین نمود. برای هر مقدار λ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
E(180 - \lambda) &= 1/15.(180 - \lambda + q(180 - \lambda - \lambda_A) - \alpha(180 - \lambda) + c) \\
&= 1/15.(180 - \lambda - q(- \lambda - \lambda_A) - 180 + \alpha(\lambda) + c) \\
& 1/15.(- \lambda - q(- \lambda - \lambda_A) + \alpha(\lambda) + c) \qquad (۹)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(360 - \lambda) &= 1/15.(360 - \lambda + q(360 - \lambda - \lambda_A) - a(360 - \lambda) + c) \\
&= 1/15.(360 - \lambda + q(180 + (180 - \lambda) - \lambda_A) - \alpha(180 + (180 - \lambda) + c) \\
&= 1/15.(360 - \lambda - q(180 - \lambda - \lambda_A) - 180 - \alpha(180 - \lambda) + c) \\
&= 1/15.(360 - \lambda + q(- \lambda - \lambda_A) - 360 + \alpha(\lambda) + c) \\
&= 1/15.(-\lambda + q(-\lambda - \lambda_A) + \alpha(\lambda) + c) \qquad (۱۰)
\end{aligned}
$$

اکنون می توانیم با استفاده از فرمول های ۴، ۶، ۹ و ۱۰ نشان دهیم که برای هر مقدار طول حقیقی خورشید Υ ، مجموع مقادیر چهار تعدیل زمان، برای آرگومنت‌های λ، (λـ ۱۸۰)، (λ + ۱۸۰) و (λـ ۳۶۰) ثابت می‌باشند:

$$
\begin{aligned}
E(\lambda) + E(180 - \lambda) + E(180 + \lambda) + E(360-\lambda) = {} & 1/15.(\lambda+q(\lambda-\lambda_A)-a(\lambda) +c)+ \\
& 1/15.(- \lambda + q(180 - \lambda - \lambda_A)+a(\lambda)+ c)+ \\
& 1/15.(\lambda - q(\lambda - \lambda_A) - a(\lambda) + c) + \\
& 1/15.(-\lambda - q(180 - \lambda - \lambda_A) + a(\lambda) + c)
\end{aligned}
$$

$$= 1/15.(4c) = 4/15.c$$

هرگاه ما مجموعاً n مقدار برای تعدیل زمان داشته باشیم، و n مضربی از ۴ باشد و آرگومنت های مربوطه ۳۶۰....، n/ ۳۶۰، ۲، n/ ۳۶۰، در آن صورت می‌توانیم n/۴ گروه از این چهار مقدار تشکیل دهیم که جمع آنها مساوی باشد با ۴/۱۵c.[۱۴]

در نتیجه، مجموع کل مقادیر موجود برای تعدیل زمان برابر خواهد بود با n/۴(۴/۱۵c) بدین معنا که

$$c = (15/n). = \sum_{i=1}^{n} E(i.360° / n) \qquad (۱۱)$$

باید توجه داشت که این فرمول هم برای تعدیل زمان به مثابه تابعی از طول متوسط خورشید، صدق نمی کند. لیکن با محاسبات مفصلی می توان نشان داد که فرمول ۱۱ حداقل به طور تقریبی برای تعدیل زمان به صورت تابعی از طول متوسط خورشید مصداق دارد، یعنی داریم:

$$c = (15/n). = \sum_{i=1}^{n} E_m(i.360° / n)$$

که در آن n تعداد کل مقادیر جدولی می باشد.

ما عملاً نه در رابطه با زاویهٔ بعد و جداول تعدیل شمسی (فرمول های ۷ و ۸) و نه در ارتباط با مقدار تقریبی ثابت دور c (فرمول ۱۱) می توانیم مقادیر دقیق $E(\lambda)$ برای تعدیل زمان به کار بریم. بلکه باید از مقادیر جدولی $T(\lambda)$ که تبدیل به ارقام ثابت شصتگانی شده‌اند، استفاده کنیم. این مقادیر، حداقل اشتباهات ناشی از سر راست کردن را دارا خواهند بود، که نسبتاً ناچیز می‌باشند. (مثلاً اختلاف بین مقادیر دقیق تابعی و مقادیری که تا به دقت ثانیه سرراست شده اند، چیزی در حدود حداکثر نیم ثانیه می باشد). از این گذشته، این مقادیر می توانند اشتباهات نسبتاً قابل توجهی مانند اغلاط محاسباتی و یا املایی داشته باشند. مع الوصف در اغلب موارد فرمول ۱۱ (با جایگزین کردن E توسط T) یک مقدار تقریبی مناسبی برای c به دست می‌دهد.

در رابطه با جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی، کاربرد فرمول ۱۱ منجر به ۳،۰;۳۰;۴ ?c می‌شود. همانگونه که در بالا نشان داده شد، خوارزمی مقدار

---

۱۴. ما برای $\lambda = 0°$ و $\lambda = 90°$ فقط دو مقدار به دست می‌آوریم؛ لیکن خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
E(0) + E(90) + E(180) + E(270) = {} & 1/15(q(0 - \lambda) + c) + 1/15(90 + q(90 - \lambda_A) - 90 + c) \\
& + 1/15(180 - q(0 - \lambda_A) + 1/15(270 - q(90 - \lambda_A) - 270 + c) \\
& + 4/15.c
\end{aligned}
$$

$$\lambda + q(\lambda - \lambda_A) - \alpha(\lambda) + c$$

را با دقتی به میزان دقیقه محاسبه کرده بود. از این گذشته، وی ظاهراً ثابت دوره را طوری انتخاب کرده بود که مقدار مینیمم تعدیل زمان برابر صفر گردد. از اینرو طبیعی به نظر می رسد که ثابت دورهٔ او هم دقتی در حد دقیقه داشته باشد. در چنین صورتی مقداری که وی به کار برده احتمالاً ۴;۳۰ = c می‌باشد.

اگر از این فرض حرکت کنیم که آرگومنت جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی، طول حقیقی خورشید، و ثابت دوره برابر با ۴;۳۰ باشد، در آن صورت می توانیم بر اساس فرمول ۷ زاویهٔ بعد را محاسبه نماییم. دستچینی از مقادیر حاصله، در جدول شماره ۱ همراه با تفاضل بین این مقادیر و مقادیر محاسبه شده برای اریبی ۲۳°۵۱ʹ جمع‌آوری شده‌اند.

جدول شماره ۱: زاویهٔ بعد که بر اساس جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی و بنا به فرض اینکه متغیر مستقل برابر با طول حقیقی خورشید باشد، دوباره تدوین شده است. ستون سوم و ششم، تفاضل بین مقادیر دوباره ساخته شده و ارقام دقیق زاویهٔ بعد را برای اریبی ۲۳°۵۱ʹ نشان می دهند.

λ	reconstructed right ascension	differences	λ	reconstructed right ascension	differences
0	0;10, 0	0;10, 0	90	89;48,30	−0;11,30
10	9;20, 0	0;10,20	100	100;44,30	−0;10,14
20	18;33,30	0; 8,47	110	111;33, 0	−0; 9, 1
30	27;56,30	0; 6,20	120	122;11, 0	−0; 4,45
40	37;33,30	0; 3,14	130	132;30,30	−0; 1,35
50	47;27, 0	−0; 0,55	140	142;31,45	0; 2, 1
60	57;38,30	−0; 5,45	150	152;15,30	0; 5,40
70	68; 9,30	−0; 8,29	160	161;43, 0	0; 7,43
80	78;55,30	0; 9,46	170	171; 0, 0	0; 9,40

همانطور که مشاهده می شود، تطابق بین این مقادیر بسیار نامناسب است. مقادیری که

مجدداً تدوین شده‌اند، برای خواص اصلی زاویهٔ بعد مانند $\alpha(0) = 0$ و $\alpha(90) = 90$ مصداق پیدا نمی کنند و ما متوجه اختلافی به میزان ۱۴ʹ می‌شویم که ناشی از وجود الگوی (pattern) خاصی می باشد.[۱۵] بنابراین احتمال می رود که یک اشتباه روشمند در دوباره سازی این مقادیر رخ داده باشد (نگاه کنید به توضیحاتی که در زیر دربارهٔ روش کمترین مربعات داده شده است). لیکن می توان اطمینان داشت که این اشتباه ارتباطی با مقادیری که ما برای ثابت دوره و اریبی دایرةالبروج به کار برده ایم، ندارد زیرا که برای هیچ یک از مقادیر این پارامترها، الگوی تفاضل‌ها در جدول ۱ ناپدید نمی شود. از اینرو نتیجه می گیریم که آرگومنت جدول خوارزمی، طول حقیقی خورشید نمی تواند باشد.

با توجه به تطابق رضایت بخش بین تعدیل شمسی که دوباره سازی شده و مقادیری که محاسبه شده اند، نتیجه می‌شود که آرگومنت جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی، طول متوسط خورشید هم نمی تواند باشد. از اینرو ما باید این امکان را درنظر بگیریم که تعدیل زمان جدول بندی شده، احتمالاً بر اساس طریقه‌هایی حساب شده است، که با روش‌های ارایه شده در بخش پنجم این مقاله، متفاوتند. یکی از راه های مؤثر ریاضی که به کمک آن می‌توان مضرب مقادیر آرگومنت مجهول یک جدول نجومی را پیدا کرد و اطلاعات بیشتری در بارهٔ تابع جدول بندی شده، بدست آورد، روش کمترین مربعات است که در صفحات بعدی مفصلاً توضیح داده خواهد شد.

روش کمترین مربعات

چگونگی استفاده از روش کمترین مربعات را برای تعیین مقادیر آرگومنت یک جدول نجومی، می توان توسط جدول شماره ۲ روشن ساخت.

۱۵. این اختلافات دال بر یک الگوی واضح سینوسی بوده و عملاً برای $\lambda = 45°$ و $\lambda = 135°$ و... برابر صفر می‌باشند. ماکزیمم این اختلافات تقریباً برابر با ۱۱ʹ را در نزدیکی صفر و ۱۸۰ درجه، و مینیمم آنها تقریباً برابر با ۱۲ʹ- در نزدیکی ۹۰ درجه می‌باشد.

جدول شماره ۲: توضیح روش کمترین مربعات

arg. λ	المجریطی	محاسبه شده	تفاضل ها	مربعات تفاضل ها
10	0;11,28	0;13, 5,40,24, 1	−0; 1,37,40,24, 1	0; 0, 2,39, 0, 5
20	0;15, 8	0;16,47,55,48,54	−0; 1,39,55,48,54	0; 0, 2,46,26, 3
30	0;18,28	0;20, 2,21,52,44	−0; 1,34,21,52,44	0; 0, 2,28,24,41
40	0;21, 4	0;22,30,18,57, 8	−0; 1,26,18,57, 8	0; 0, 2, 4,10,26
50	0;22,48	0;23,57,55,18,24	−0; 1, 9,55,18,24	0; 0, 1,21,29, 3
60	0;23,28	0;24,18,27,17,28	−0; 0,50,27,17,28	0; 0, 0,42,25,42
70	0;23, 0	0;23,34,23,43,45	−0; 0,34,23,43,45	0; 0, 0,19,43, 3
80	0;21,32	0;21,58,21,35,23	−0; 0,26,21,35,23	0; 0, 0,11,34,50
90	0;19,40	0;19,51,56,41,35	−0; 0,11,56,41,35	0; 0, 0, 2,22,41
100	0;17,32	0;17,42, 7,59,49	−0; 0,10, 7,59,49	0; 0, 0, 1,42,41
110	0;15,52	0;15,56, 0,34,33	−0; 0, 4, 0,34,33	0; 0, 0, 0,16, 5
120	0;14,44	0;14,55,28,26, 2	−0; 0,11,28,26, 2	0; 0, 0, 2,11,39
130	0;14,44	0;14,53,38,17,34	−0; 0, 9,38,17,34	0; 0, 0, 1,32,54
140	0;15,44	0;15,53,39,28,19	−0; 0, 9,39,28,19	0; 0, 0, 1,33,16
150	0;17,36	0;17,49,38,24,14	−0; 0,13,38,24,14	0; 0, 0, 3, 6, 3
160	0;20,24	0;20,28,41,33,54	−0; 0, 4,41,33,54	0; 0, 0, 0,22, 1
170	0;23,32	0;23,33,13,53,43	−0; 0, 1,13,53,43	0; 0, 0, 0, 1,31
180	0;26,52	0;26,43, 2,19, 9	0; 0, 8,57,40,51	0; 0, 0, 1,20,18
190	0;29,52	0;29,36,56,49,11	0; 0,15, 3,10,49	0; 0, 0, 3,46,36
200	0;32,24	0;31,54,16,28, 2	0; 0,29,43,31,58	0; 0, 0,14,43,36
210	0;34, 0	0;33,16,14,32,26	0; 0,43,45,27,34	0; 0, 0,31,54,44
220	0;34,28	0;33,27,36,53,53	0; 1, 0,23, 6, 7	0; 0, 1, 0,46,21
230	0;33,36	0;32,18,41, 6,52	0; 1,17,18,53, 8	0; 0, 1,39,37,34
240	0;31,24	0;29,47,28,59,23	0; 1,36,31, 0,37	0; 0, 2,35,15,30
250	0;27,44	0;26, 1,42,15, 8	0; 1,42,17,44,52	0; 0, 2,54,24,26
260	0;23, 4	0;21,19,28,46,11	0; 1,44,31,13,49	0; 0, 3, 2, 4,32
270	0;17,52	0;16, 8, 3,18,25	0; 1,43,56,41,35	0; 0, 3, 0, 4,32
280	0;12,32	0;11, 0, 1,38,37	0; 1,31,58,21,23	0; 0, 2,20,58,58
290	0; 7,44	0; 6,27,53,26,34	0; 1,16, 6,33,26	0; 0, 1,36,32,37
300	0; 3,48	0; 2,58,35,17, 8	0; 0,49,24,42,52	0; 0, 0,40,41,32
310	0; 1,12	0; 0,49,45,17,10	0; 0,22,14,42,50	0; 0, 0, 8,14,51
320	0; 0, 2	0; 0, 8,24,40,40	−0; 0, 6,24,40,40	0; 0, 0, 0,41, 6
330	0; 0,20	0; 0,51,45,10,37	−0; 0,31,45,10,37	0; 0, 0,16,48,15
340	0; 1,52	0; 2,49, 6, 9,10	−0; 0,57, 6, 9,10	0; 0, 0,54,20,42
350	0; 4,28	0; 5,44, 8,53, 6	−0; 1,16, 8,53, 6	0; 0, 1,36,38,32
360	0; 7,48	0; 9,16,57,40,51	−0; 1,28,57,40,51	0; 0, 2,11,54, 7
		جمع مربعات تفاضل ها		0; 6,18,43,18, 0

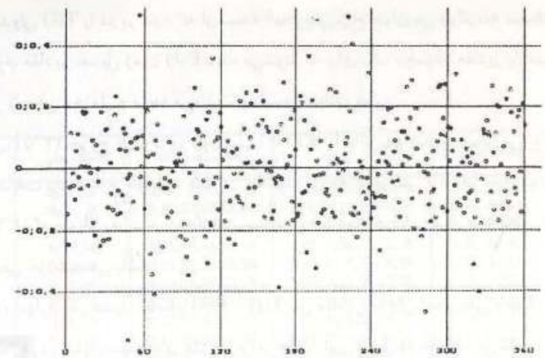
ستون اول این جدول حاوی آرگومنت های λ یک جدول تعدیل زمان می باشد. ستون دوم

مقادیر جدولی T(λ) را در بر دارد که از نسخهٔ المجریطی زیج خوارزمی برگرفته شده‌اند. در ستون سوم، مقادیر تعدیل زمان E(λ) دیده می‌شوند که برای یک مجموعه مقادیر پارامتر که از نقطه نظر تاریخی محتمل و موجه می‌باشد، محاسبه شده‌اند؛ یعنی:

اریبی ۲۳°۵۱′ خروج از مرکزی خورشید ۲;۲۰ (که با ماکزیمم تعدیل خوارزمی به مقدار ۲°۱۴ مطابقت دارد)، اوج خورشید ۷۷°۵۵′ (به گونه ای که المجریطی ذکر کرده است)، ثابت دوره ۴°۳′ (که در بالا به دست آمد)، ضریب تبدیل ۱۵ و بالاخره این فرض که متغیر مستقل، طول حقیقی خورشید می باشد.

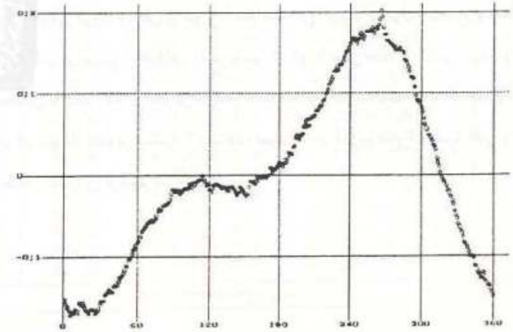
ستون چهارم این جدول تفاضل T(λ) - E(λ) بین مقادیر جدولی المجریطی و محاسبات ما را در بر دارد. در ستون پنجم توان های دوم (مربعات) این تفاضل‌ها ملاحظه می‌شوند. مجموع مربعات یا توان های دوم (شامل کلیهٔ مقادیر جدولی موجود در نسخهٔ المجریطی) در آخرین ستون این جدول آورده شده اند.

همانطور که در زیر خواهد آمد، از ستون چهارم جدول شماره ۲ نتیجه می شود، که یا فرض ما مبنی بر اینکه در جدول خوارزمی طول حقیقی خورشید به مثابه متغیر مستقل به کار رفته است، اشتباه است و یا مقادیر انتخاب شده برای پارامتر مغلوط می باشند. معمولاً موقعیکه ما یک جدول نجومی قرون وسطی را مجددا محاسبه می کنیم و فرمول صحیح و مقادیر صحیح پارامتر را به کار می بریم، تفاضلاتی را می‌یابیم که کم یا بیش مقادیر اتفاقی بوده و ماکزیممی حداکثر مطابق با چند رقم از آخرین موضع شستصگانی، دارند. یک نمونه از چنین تفاضل اتفاقی را می‌توان در نمودار تصویر شماره ۴ مشاهده نمود که در آن موضع خورشید افقی و تفاضل ها به صورت نقطه، عمودی ترسیم شده‌اند.



تصویر شماره ۴: تفاضل اتفاقی بین مقادیر تعدیل زمان که به دقت ثانیه محاسبه شده اند و مقادیری که مجدداً تعیین شده اند (افقی: طول خورشید؛ عمودی: تفاضل به ساعت).

در ستون چهارم جدول شماره ۲، ما نه تنها تفاضل‌هائی تا ۱۰۰ واحد (یعنی ۱۴۴ً) می‌یابیم، بلکه در یک نمودار که این تفاضل‌ها را نشان می‌دهد (تصویر شماره ۵)، می‌توانیم حتی به وضوح یک الگوی غیر اتفاقی را مشاهده کنیم که کم یا بیش شکل خود تعدیل زمان را دارد (مقایسه کنید با تصویر شماره ۳).



تصویر شماره ۵: تفاضل بین مقادیر تعدیل زمان در زیج خوارزمی و مقادیری که مجددا محاسبه و در تصویر شماره ۲ درج شده اند.

حضور یک چنین الگویی در تفاضل ها، معمولاً نشانهٔ این است که در محاسبات یا از یک فرمول اشتباه و یا از مقادیر مغلوط پارامتر، استفاده شده است.

برای اینکه بتوان مقادیر بنیادین پارامترها را یافت که به بهترین وجهی با جدول تعدیل زمان منطبق باشند، می‌توانیم از روش کمترین مربعات استفاده کنیم. در ستون پنجم جدول شماره ۲ مربع تفاضل های مندرج در ستون چهارم آورده شده اند. در آخرین ردیف این ستون، ما جمع مربعات کلیه مقادیر جدولی موجود در نسخهٔ المجریطی را مشاهده می کنیم (از این مقادیر فقط هر دهمین آنها در جدول شماره ۲ آورده شده اند). هرگاه ما مجموعه‌های مختلفی از مقادیر پارامتر را برای محاسبه ستون سوم به کار گیریم، در آن صورت تفاضل های مندرج در ستون چهارم، و مربعات تفاضل های مندرج در ستون پنجم و نیز جمع مربعات، همگی متفاوت خواهند بود. طبق روش کمترین مربعات، مقادیر پارامتر طوری تعیین می‌شوند که جمع مربعات تفاضل های بین جدول المجریطی و جدول محاسبه شده، حتی المقدور کوچک باشد. به بیان ریاضی، مقادیر پارامتر از طریق به حداقل رسانیدن جمع $\sum_{\lambda} (T(\lambda) - E(\lambda))^2$ حاصل می شوند. این جمع شامل کلیه مقادیر جدولی λ می‌باشد. از آنجا که مربعات همواره مثبت هستند، جمع مربعات تفاضل‌ها فقط در صورتی می‌تواند کوچک باشد که مقدار مطلق همه تفاضل‌ها کوچک باشد. و این بدان معنا است که تمامی مقادیر محاسبه شده، باید نزدیک به مقادیر جدولی باشند.

به جای جمع مربعات تفاضل ها، ما اغلب از انحراف معیار تفاضل‌ها استفاده می کنیم که از طریق تقسیم جمع مربعات تفاضل ها به تعداد کل مقادیر جدولی و گرفتن جذر دوم حاصل تقسیم، محاسبه می شود.[۱۶] انحراف معیار، مقیاس مرسومی است برای تعیین تفاضل های بین دو مجموعه از مقادیر، که قابل مقایسه باشند. در مثالی که ما در جدول شماره ۲ آورده ایم، میانگین مربعی تفاضل‌ها تقریباً ۰;۰،۱،۳،۷،۱۳ (یعنی ۰;۶،۱۸،۴۳،۱۸/۳۶۰) می‌باشد و انحراف معیار برابر است با ۰;۱،۱،۳۲،۲۵. در زیر خواهیم دید که اگر ما با استفاده از فرمول صحیح و مقادیر صحیح پارامتر، جدولی را با مقادیری به دقت ثانیه محاسبه کنیم، در آن صورت انحراف معیار تفاضل‌های بین مقادیر جدولی و مقادیر محاسبه شده، تقریباً ۰;۰،۰،۱۷ خواهد بود. بدین ترتیب انحراف معیار تفاضل‌ها برای محاسبه مجددی که ما از جدول المجریطی انجام می‌دهیم، بیشتر از ۲۰۰ بار بزرگتر از یک محاسبه صحیح، خواهد بود.

---

۱۶. برای مقاصد آماری، انحراف معیار را معمولاً از طریق تقسیم جمع‌مربعات تفاضل‌ها به n - ۱ (n نمایانگر تعداکل مقادیر جدولی است) و گرفتن ریشهٔ دوم حاصل تقسیم، محاسبه می‌کنند. در نتیجه انحراف معیار، مقدار تقریبی بهتری را برای پارامتری که ویژگی آماری تفاضل‌ها را توصیف می‌کند، به دست می‌دهد.

تعیین کردن مقادیر پارامتر، موقعیکه جمع مربعات تفاضل‌ها (و در نتیجه انحراف معیار تفاضل ها) بین یک جدول تاریخی و یک جدول محاسبه شده، خیلی کوچک باشد، مسئله‌ای است غامض. در اینگونه موارد، معمولاً باید از یک روش تکراری که با مقادیر محتمل پارامتر آغاز می شوند (مانند مقادیری که ما در محاسبات خود در جدول شماره ۲ به کار برده‌ایم) استفاده کرده و سپس مقادیری را محاسبه نمود که جمع مربعات تفاضل ها برای آنها کمترین مقدار را دارد. یک چنین محاسبه ای معمولاً تفاضل های بین جدول موجود و جدول محاسبه شده برای مقادیر آغازین پارامتر و همچنین مشتق تابع جدولی را در بر گرفته و در ضمن آگاهی‌های لازم را دربارهٔ سرعت تغییر جمع مربعات تفاضل‌ها بر حسب تغییر مقادیر پارامتر، به دست می‌دهد. ما پس از چند بار تکرار این رویه (معمولاً سه تا چهار بار)، می‌توانیم رقم تقریبی بسیار خوبی برای مقادیر پارامتر به دست آوریم که برای آنها، جمع مربعات تفاضل‌های بین جدول موجود و جدول محاسبه شده کمترین مقدار را داشته باشد. مقادیری که بدین ترتیب حاصل می‌شوند، کمترین مربعات برآوردی پارامتر جدول خوانده می‌شوند.

روش کمترین مربعات را می‌توان به کمک برنامه کامپیوتری که من طرح ریزی کرده‌ام و 'تحلیل جدول' نام دارد، برای تعیین مقادیر بنیادین پارامتر اغلب جدول‌های استانده (استاندارد) نجومی بطلمیوسی، به کار برد. روش تکراری که در این برنامه به کار گرفته شده است، عبارت از شیوهٔ موسوم به گاوس-نیوتن(۷۶) می‌باشد و نتایج بسیار خوبی به دست می دهد. استفاده کنندگان از این برنامه، نیازی به دانستن جزییات روش تکراری ندارند. کافی است که فقط معلوم کنند که کدام مقادیر پارمتر را از کدام جدول مایلند برآورد نمایند. ولی در عین حال باید اذعان داشت که تعبیر و تفسیر نتایج حاصله از روش کمترین مربعات، چندان ساده نیست. این موضوع در بخش بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تشریح نتایج روش کمترین مربعات

روش کمترین مربعات، تقریب های دقیقی برای مقادیر نامعلوم پارامتر یک جدول نجومی به دست می دهد، مشروط بر اینکه تابع زیربنایی صحیحی را به کار برده باشیم. این امر در وهله اول مستلزم اینست که بدانیم برای کدام تابعی، جدول مورد نظر محاسبه شده است؛ مثلا ممکن است که تعدیل یک سیاره، مطابق طریقه جیب‌ها و یا روش میل (نگاه کنید به پاورقی ۶) محاسبه شده باشد. در وهله دوم، مهم است که روش محاسبه جدول را دقیقاً بشناسیم و بدانیم که آیا این روش، منابع اشتباهات روشمندی را از قبیل درونیابی خطی، حذف کامل نتایج میانی و یا استفاده از جداول کمکی نا دقیق، دارا هست یا خیر. زیرا اگر چنین باشد، نتایج حاصله از روش کمترین مربعات، نا معتبر خواهند بود. حال برای اینکه بتوان تشخیص داد که آیا نتایج حاصله می‌توانند

معتبر باشند یا خیر، سه محک زیر را در مد نظر می‌گیریم:

۱) انحراف معیار تفاضل ها بین یک جدول تاریخی و جدولی که بر اساس کمترین مربعات برآورد پارامترها محاسبه شده است، باید به وجهی منطقی ناچیز باشد.[۱۷] در عین حال، نباید انتظار داشت که این انحراف معیار برابر با صفر باشد. زیرا ما حتی اگر تابع بنیادین صحیح و مقادیر صحیح پارامتر را برای محاسبه مجدد جدول تعدیل زمان خوارزمی از جدول شماره ۲ انتخاب کرده بودیم، باز هم مقادیر ستون دوم، چیزی جز ارقام سرراست شدهٔ مقادیر دقیق ستون سوم نمی‌بودند و تفاضل‌های ستون چهارم بین ۳۰،۰،۰؛۰− و ۳۰،۰،۰؛۰+ قرار می گرفتند. از طریق آماری می توان نشان داد که در چنین صورتی انحراف معیار تفاضل ها بین مقادیر دقیق و مقادیر سرراست شده، تقریباً برابر با ۱۷،۰،۰؛۰ می‌باشد.[۱۸] در نتیجه انحراف معیار تفاضل‌ها بین یک جدول تاریخی که مقادیر آن با دقتی به میزان ثانیه تعیین شده باشند، و جدولی که با روش کمترین مربعات برآورد پارامترها محاسبه شده باشد، معمولاً کمتر از ۱۷،۰،۰؛۰ نخواهد بود. چنانچه انحراف معیار خیلی بیشتر از این مقدار باشد، در آن صورت باید امکان این را در نظر داشت که احتمالاً یک تابع نادرست انتخاب شده است.

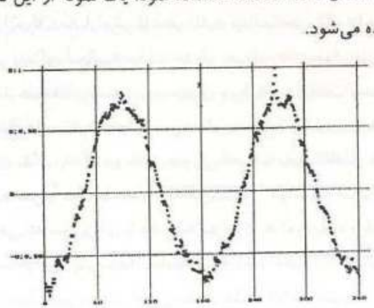
۲) تفاضل‌های بین یک جدول تاریخی و محاسبه ای که بر مبنای کمترین مربعات برآورد پارامترها صورت گرفته است، باید اتفاقی بوده و الگوی خاصی را نشان ندهند. هرگاه این تفاضل ها شکل منحنی جیبی و یا شکل منظم دیگری باشند، در آن صورت می توان مطمئن بود که یا یک تابع بنیادین نادرست را به کار برده‌ایم و یا درمحاسبات خود، جنبه هایی را که منجر به اشتباهات روشمند می‌شوند، در نظر نگرفته‌ایم.[۱۹] هرگاه تفاضل ها شکل اتفاقی داشته باشند، در

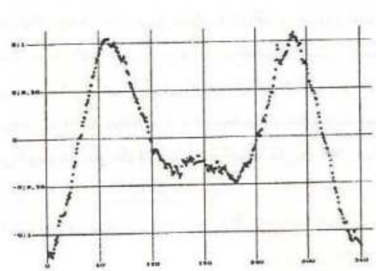
۱۷. باید توجه داشت که این انحراف معیار، کمترین مقدار ممکن برای کلیهٔ مجموعه‌های مقادیر پارامتر مورد نظر می‌باشد.

۱۸. تفاضل‌های بین مقادیر جدولی که به طور صحیح و مقادیری تابعی که به طور دقیق محاسبه شده باشند، می‌توانند احتمالاً به طور یکنواخت پراکنده باشند. هرگاه مقادیر جدولی با دقتی به میزان ثانیه محاسبه شده باشند، در آن صورت تقریباً تمام ارقام ممکن، به طور یکسان در موضع سوم کسری مقادیری تابعی که در دستگاه شصتگانی محاسبه شده‌اند، قرار خواهند گرفت. انحراف معیار چنین تفاضل‌ها را که به طور یکنواخت پراکنده شده‌اند، می‌توان به مقدار تقریبی ۱۷، ۰، ۰؛ ۰ محاسبه نمود. لیکن چنانچه مقادیر جدولی با دقتی به میزان دقیقه محاسبه شده باشند، در آن صورت انحراف معیار تقریباً برابر با ۱۷، ۰؛ ۰ و الی آخر خواهد بود.

۱۹. باید توجه داشت که قبل از اینکه ما روش کمترین مربعات را در مثال‌های خود در جدول شماره ۲ به کار بریم، دو علت ممکن برای پیش آمدن الگوهای واضح در تفاضل‌ها، وجود داشتند؛ با یک تابع بنیادین ←

آن صورت ما احتمالاً تابع بنیادین درستی را انتخاب کرده‌ایم، حتی اگر انحراف معیار تفاضل مقدار بزرگی باشد. مثال‌هایی را برای تفاضل هایی با الگوهای واضح، می‌توان در نمودارهایی که در تصاویر ۵، ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند، مشاهده نمود. یک نمونه از این تفاضل‌های اتفاقی در تصویر شماره ۴ دیده می‌شود.





تصویر شماره ۷: نمودار تفاضل های میان تعدیل زمان در زیج خوارزمی و بهترین محاسبهٔ مجدد بر مبنای این فرض که آرگومنت جدول طول متوسط خورشید باشد.

۳) کمترین مربعات برآوردها می باید یا برابر با مقادیر محتمل تاریخی پارامترها باشد، یا

←

نادرست و یا مقادیر بنیادین نادرست پارامترها را مورد ملاحظه قرار داده‌ایم، آنهم به وجهی که این تفاضل‌ها به حداقل خود رسیده باشند، دیگر می‌توانیم اطمینان خاطر داشته باشیم که علت این الگوهای خاص، انتخاب یک تابع بنیادین نادرست می‌باشد.

نزدیک به آنها. لیکن در عمل فقط امکانات معدودی برای مقادیر بنیادین پارامترهای یک جدول تاریخی وجود دارند. این مقادیر یا آنهایی هستند که در منابع تاریخی تأیید شده‌اند (مانند مقدار بطلمیوسی ۳۰°۵۱′۴″ برای اریبی دایرهٔ البروج و مقدار بتانی ۲؛۴،۴۵ برای خروج از مرکزی خورشید) و یا ارقام سرراست شده هستند (مانند مقدار خوارزمی ۴°۳۰′ برای ثابت دوره که ما آنرا قبلا یافتیم). هرگاه کمترین مربعات برآوردها خیلی از مقادیر محتمل تاریخی پارامتر به دور باشند، در آن صورت ما تابع بنیادین نادرستی را انتخاب کرده‌ایم.

فاصله اطمینان [۸۴]

ما اگر حتی تابع بنیادین درستی انتخاب کرده باشیم، باز هم کمترین مربعات برآورد پارامترهای یک جدول نجومی موجود، مطابقتی با مقادیر پارامتری که فی‌الواقع برای محاسبه به کار گرفته می‌شود، نخواهد داشت. این مقادیر معمولاً ارقام سرراسته شده ای می باشند (به بالا مراجعه شود). در حالیکه کمترین مربعات برآوردها، کمیاتی هستند که به طریق عددی تعیین شده و می‌توانند هر مقداری را دارا می باشند؛ مثلاً ۲۳؛۳۴،۵۹،۴۵،۱۸،۶ برای اریبی یا ۲؛۴،۴۵،۱۷،۲۳،۱۵ برای خروج از مرکزی خورشید.[۲۰] ما باید پس از به کار گرفتن روش کمترین مربعات، ارقام محتمل تاریخی و سرراست را به وجهی در نزدیکی برآوردها پیدا کنیم که انحراف معیار تفاضل‌ها بین یک جدول موجود و محاسبهٔ مجدد مقادیر تاریخی، فقط کمی بیشتر از انحراف معیار کمترین مربعات برآوردها باشد. این تصمیم که مقادیر محتمل تاریخی تا چه حد می‌توانند از کمترین مربعات برآورد ها به دور باشند، می‌تواند بر مبنای آنچه که به آن اصطلاحاً فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ می‌گویند، برای پارامترهای بنیادین گرفته شود. فواصل اطمینان فواصلی هستند که به طریق آماری در حول و حوش کمترین مربعات برآوردها که انتظار می رود مقادیر پارامتر در ۱۹ مورد از ۲۰ مورد داشته باشند، تعیین شده اند.

مثلاً اگر ما یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ بین <۶، ۳۵؛ ۲۳، ۲۳، ۵۷، ۳۴؛ ۲۳> برای اریبی دایرة البروج به دست آوریم، در آن صورت می‌توانیم با اطمینان خاطر نتیجه بگیریم که مقدار بنیادین پارامتر ۲۳°۳۵′ می‌باشد، زیرا که این تنها مقدار محتمل تاریخی در حول و حوش فاصله اطمینان

۲۰. دلیل اینکه کمترین مربعات برآوردها معمولاً برابر با مقادیر واقعی پارامتر تاریخی نیستند این است که مقادیر جدولی، اشتباهاتی ناشی از سرراست کردن ارقام و یا احتمالاً اشتباهات دیگر در خود نهفته دارند. حتی اگر ما مقادیر تابعی دقیقی را در ارتباط با روش کمترین مربعات مورد استفاده قرار دهیم، باز هم برآوردهای حاصله نباید حتماً برابر با مقادیر واقعی پارامتر باشند زیرا که کامپیوتر آنها را سرراست می‌کند.

می‌باشد. لیکن هرگاه ما یک فاصله اطمینان ۹۵٪ بین <۵۶، ۴، ۲، ۲۷، ۴؛ ۲> برای خروج از مرکزی خورشید به دست آوریم، در آن صورت جدول ما می‌تواند یا بر اساس مقادیر تأیید شدهٔ ۲؛۴،۳۵،۳۰ (معادل یک ماکزیمم تعدیل شمسی به میزان ۱°۵۹́) باشد، یا بر مبنای ۴۵، ۴، ۲ (معادل ″۱۰ ۱°۵۹́).

کاربرد روش کمترین مربعات در رابطه با جدول خوارزمی

ما پیدا کردیم که ضریب تبدیل بنیادین جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی، برابر با ۱۵ درجه در ساعت می‌باشد. علاوه بر این، انتظار این را داریم که آرگومنت این جدول، طول حقیقی خورشید باشد. بر اساس این مفروضات، نتایج استفاده از روش کمترین مربعات (آنگونه که در برنامه رایانه ای من نشان داده شده است) به عبارت زیر خواهند بود:

تعدیل زمان خوارزمی (جداول سوتر ۶۸-۶۷)

کمترین مربعات برآوردها از مقادیر آرگومنت‌ها ۱، ۲،......، ۳۶۰.

آخرین نتایج (پس از ۳ بار تکرار)

پارامتر	برآورد	فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪
اریبی	۱، ۴۵، ۳۰، ۶، ۵۰؛ ۲۳	<۴۷، ۲۷، ۵۸، ۱۳، ۵۵؛ ۲۳ ، ۵۷، ۳۴، ۵۸، ۴۴؛ ۲۳>
خروج از مرکزی	۵۳، ۱۸، ۲۸، ۵۰، ۲۹؛ ۲	<۱۵، ۴۷، ۳۵، ۱، ۳۱؛ ۲، ۳۰، ۵۰، ۲۰، ۳۹، ۲۸؛ ۲>
حضیض	۳۰، ۳۹، ۲۱، ۳۳، ۴۰؛ ۸۴	<۵۴، ۵، ۵۱، ۴۵، ۷؛ ۸۵ ، ۶، ۱۳، ۵۲، ۲۰، ۱۳؛ ۸۴>
ثابت دوره	۰، ۰، ۰، ۳، ۳۰؛ ۴	<۵۱، ۲۵، ۳، ۵۱، ۳۰؛ ۴ ، ۹، ۳۴، ۵۶، ۱۴، ۲۹؛ ۴>

انحراف معیار تفاضل‌ها: ۳۲، ۵۱، ۰، ۳۱، ۰؛ ۰

گرچه ما مقادیر محتمل تاریخی را برای اریبی دایرة البروج و خروج از مرکزی خورشید پیدا کرده ایم (مقدار بطلمیوس و خوارزمی برای اریبی ۲۳؛۵۱ می باشد و مقدار بطلمیوس برای خروج از مرکز در وسط فواصلهٔ اطمینان ۹۵٪ قرار دارد)، ولی ما نمی توانیم با این نتایج راضی باشیم، زیرا مشاهده می کنیم که کلیه مقادیر جدولی ضرایبی از چهار ثانیه می باشند. اگر ما تابع صحیح و روش درست محاسبه را به کار برده بودیم، انحراف معیار تفاضل‌ها بین جدول خوارزمی و جدول محاسبه شده بر مبنای کمترین مربعات برآورد ها، تقریباً برابر با ۰؛۰،۱،۲۸ = ۴x۰؛۰،۰،۱۷ می‌شد. ولی انحراف معیاری که پیدا شده، ۲۰ برابر بزرگتر از این مقدار است. علاوه بر این، از آنجا که تفاضل ها یک الگوی کاملاً روشن با دامنه‌ای[85] تقریباً برابر با ۴۵ ثانیه

نشان می‌دهد (تصویر شماره ۶)، باید نتیجه بگیریم که ما تابع بنیادین صحیح را به کار نبرده ایم، یعنی جدول خوارزمی یک جدول معمولی برای تعدیل زمان به مثابه تابعی از طول حقیقی خورشید نمی‌باشد.

حال روش کمترین مربعات برآورد را با در نظر گرفتن دیگر امکانات در رابطه با تابع بنیادین به کار می‌بریم. هرگاه فرض کنیم که آرگومنت جدول، طول متوسط خورشید باشد، در آن صورت نتایج محاسبه به عبارت زیر خواهند بود:

تعدیل زمان خوارزمی (جداول سوتر ۶۸ ـ ۶۷)

کمترین مربعات برآوردها از مقادیر آرگومنت‌ها ۱، ۲،......، ۳۶۰.

آخرین نتایج (پس از ۳ بار تکرار)

پارامتر	برآورد	فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪
اریبی	۳۲، ۱۸، ۱۷، ۳۱، ۳۵؛ ۲۳	<۴۸، ۴۵، ۲۴، ۴۸، ۴۱؛ ۲۳ ، ۳۰، ۴۳، ۱۲، ۲۹؛ ۲۳>
خروج از مرکزی	۰۰، ۲۵، ۵۱، ۱۱، ۳۶؛ ۲	<۲۰، ۳۲، ۵۴، ۴۱، ۳۷؛ ۲ ،۴۰، ۱۷، ۴۸، ۴۱، ۳۴؛ ۲>
حضیض	۴۵، ۵۰، ۱۲، ۳۰، ۱۷؛ ۸۵	<۲۷، ۳۷ و ۳۹ و ۴۸ و ۴۷؛ ۸۵ ، ۳، ۴، ۴۶، ۱۱، ۴۷؛ ۸۴>
ثابت دوره	۰۰، ۰۰، ۳، ۳۰؛ ۴	<۲۶، ۴۶، ۱۷، ۱، ۳۱؛ ۴ ، ۳۴، ۱۳، ۴۲، ۴، ۲۹؛ ۴>

انحراف معیار تفاضل ها: ۵۹،۱۹،۳۷،۰۰؛۰

حال ما یک مقدار کاملاً متفاوت ولی محتملی برای اریبی دایرة البروج پیدا کرده ایم (مقدار معمول در اسلام ۲۳؛۳۵ می باشد). در حالیکه یک مقدار غیر ممکن برای خروج از مرکزی خورشید به دست آورده ایم. علاوه بر این، مینیمم ممکن انحراف معیار، باز هم خیلی بزرگتر از مقدار ۰؛۰،۱،۲۸ می‌باشد که ما برای یک تابع بنیادین درست می توانستیم انتظار داشته باشیم. تفاضل های بین جدول خوارزمی و جدول محاسبه شده بر اساس برآوردها هم یک الگوی کاملاً مشخصی را نشان می دهند (و این بار خیلی پیچیده تر از یک منحنی جیبی؛ نگاه کنید به نمودار تصور شماره ۷). از اینجا نتیجه می گیریم که تعدیل زمان، تابعی از طول متوسط خورشید هم نمی تواند باشد.

تعدیل جا بجایی شمسی

در اینجا باید توجه خود را به منابع تاریخی مبذول نمائیم تا بتوانیم دریابیم که آیا روش های ممکن دیگری نیز برای محاسبه تعدیل زمان وجود دارند یا خیر. در سال ۱۹۸۸ کندی دو جدول اسلامی تعدیل زمان ، یعنی جدول زیج جامع کوشیار بن لبان (حدود ۹۷۰ میلادی) و جدول زیج

خاقانی کاشی (حدود ۱۴۲۰ میلادی) را تجزیه و تحلیل نمود. او در بررسی خود، از قواعدی پیروی کرد که در این دو زیج ذکر شده بودند و مطابقت کاملی بین جدول کاشی و محاسبات خود پیدا کرد. لیکن در مقایسه با جدول کوشیار، اختلافات چشمگیر روشمندی بین مقادیر جدول وی و مقادیری که خود محاسبه کرده بود، مشاهده نمود.

من در رساله دکترای خود (۱۹۹۳، صفحات ۱۳۴ تا ۱۴۱)، یک بار دیگر جدول تعدیل زمان کوشیار را بررسی کردم. ولی استفاده از روش کمترین مربعات در آنجا، مانند مورد حاضر، بلافاصله منجر به نتیجه دلخواه نشد. از اینرو خود را با متن زیج جامع مشغول کرده و متوجه شدم که کوشیار، یعنی کسی که تعدیل زمان را به مثابه تابعی از طول متوسط خورشید جدول بندی کرده بود، از روشی که اصطلاحاً به آن تعدیل جابجایی شمسی[۸۶] می‌گویند، متابعت کرده است. همانطور که در بخش پنجم مقاله حاضر مشاهده کردیم، تعدیل شمسی که توسط بطلمیوس و بسیاری از منجمین اسلامی تعیین شده است، گاهی تفریقی و گاهی جمعی است. بدین معنا که استفاده کنندگان از جدول تعدیل شمسی، خود می بایستی تشخیص می دادند که آیا تعدیل شمسی را می باید به طول خورشید اضافه و یا از آن کم کنند. این امر بستگی به این داشت که مقدار آنومالی خورشید چقدر باشد. کوشیار برای پرهیز از این مشکل، تعدیل شمسی $q_m(a_m)$ خود را همواره اضافه می کرد بدین طریق که آن را از ۲É کسر می‌نمود. با توجه به این نکته، می‌توان یک تعدیل جابجائی $q_{md}(a_m)$ به شکل $q_m(am) = 2 - q_{md}(a_m)$ تعریف نمود. (در اینجا نیز a_m آنومالی متوسط خورشید را نشان داده و برابر است با $(\lambda_m - \lambda_A)$. رویکرد کوشیار، البته کار جدیدی نبود، زیرا می توان منباب مثال یادآور شد که همین روش را حبش الحاسب (در حدود ۸۳۰ میلادی) نیز برای جداول تعدیل قمری به کار بسته بود (کندی و سلام ۱۹۶۷، صفحات ۴۹۶ و ۴۹۷).[۲۱] اگر کوشیار تعدیل جا بجایی شمسی $q_{md}(\lambda_{md} - \lambda_A)$ را بـه طـول خورشید λ_m اضافه می‌کرد، نتیجه ای که به دست می‌آورد، عبارت بود از:

$$\lambda_m + q_{md}(\lambda_m - \lambda_A) = \lambda_m + (2 - q_m)\lambda_m - \lambda_A = \lambda + 2$$

به جای طول حقیقی خورشید یعنی λ (رجوع کنید به بخش پنجم این مقاله).

۲۱. نسخهٔ خطی بنی جامی ۷۸۴/۲ زیج حاسب که در استانبول موجود می‌باشد، حاوی یک جدول برای + $\lambda_A q_m(a_m)$ می‌باشد که در آن λ_A طول جغرافیائی حضیض خورشید و $q_m(a_m)$ تعدیل خورشید به مثابه تابعی از آنومالی متوسط خورشید می‌باشد (مقایسه کنید با دبارنو Debarnot ۱۹۸۷، صفحه ۵۸). بر اساس این جدول می‌توان موضع خورشید را با استفاده از مقدار آنومالی متوسط خورشید و اضافه کردن آن به آنومالی، محاسبه کرد.

به همین جهت کوشیار مقدار λ_A را توسط طول جابجایی متوسط خورشید λ_{ms} جایگزین نمود، یعنی $\lambda_{ms} = \lambda_m - 2$ حال با اضافه کردن تعدیل جابجایی شمسی به طول جابجایی متوسط خورشید، طول حقیقی خورشید به دست می آید. برای اینکه به توان تعدیل جا بجایی شمسی را به صورت تابعی از طول جابجایی خورشید جدول بندی نمود، کوشیار می‌بایستی همه مقادیر را به میزان دو درجه به عقب ببرد، یعنی

$$q_{md}(\lambda_{ms}- \lambda_A) = 2 - q_m(\lambda_{ms} - \lambda_A + 2)$$

(مقایسه کنید با جدول شماره ۳).[۲۲]

کوشیار از این طریق توانست موضع حقیقی خورشید را مطابق طول متوسط جا بجایی خورشید λ_{ms} با اضافه کردن $q_{md}(\lambda_{ms} - \lambda_A)$ به λ_{ms} محاسبه کند:

$$\begin{aligned} \lambda_{ms} + q_{md}(\lambda_m - \lambda_A) &= (\lambda_{ms} - 2) + (2 - q_m(\lambda_{ms} + -\lambda_A) \\ &= \lambda_m - q_m(\lambda_m - \lambda_A) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

اکنون طبیعی به نظر می رسد که آرگومنت جدول تعدیل زمان در زیج کوشیار طول متوسط جا بجایی خورشید λ_{ms} باشد و نه طول متوسط خورشید λ_m ازاینرو می‌توانیم انتظار داشته باشیم که تعدیل جدول بندی شده عبارت باشد از:

$$\begin{aligned} E_{ms}(\lambda_{ms}) &= E_m(\lambda_m + 2) \\ &= 1/15.(\lambda_{ms} + 2 - a(\lambda_{ms} + 2 - q_m(\lambda_{ms} + 2) + c) \end{aligned}$$

(مقایسه کنید با فرمول ۵ و توجه داشته باشید که تعدیل جا بجایی زمان برای آرگومنت λ_{ms} با آرگومنت 'منظم' زمان یعنی $\lambda_m = \lambda_{ms} + 2$ مطابقت دارد). بدین ترتیب مشاهده می شود که می توان تعدیل زمان تابع طول متوسط جابجایی خورشید را از تعدیل 'منظم' زمان، با به عقب بردن کلیه مقادیر به مقدار دو درجه، مشتق نمود.

۲۲. به این ترتیب مقادیر تعدیل خورشید یعنی $q_m(0°) = 0;0,0$ و $q_m(180°) = 0;0,0$، در زیج کوشیار مبدل به تعدیل جا بجائی خورشید یعنی $(q_{md}(358°) = 2;0,0$ = $q_m(-2°)$ و $q_{md}(178°) = 2;0,0$ شده‌اند. در نتیجه ماکزیمم مقدار $q_m(92°) = 1;59,10$ منجر به یک مینیمم $q_{md}(90°) + 0;0,50$ و مینیمم $q_m(268°) =$ ‎-1;59,10 منجر به یک ماکزیمم $q_{md}(266°) = 3;59,10$ می‌شود (در هر دو مورد آرگومنت q_{md} طول متوسط و جا به جائی خورشید می‌باشد).

جدول شماره ۳: تعدیل جا بجایی و جایگزینی خورشید در زیج کوشیار

λ_m	تعدیل "منظم" خورشید	λ_m	تعدیل جابجائی خورشید	λ_{ms}	تعدیل جایگزینی خورشید
۳۵۶	-۰;۸,۲	۳۵۶	۲;۸,۲	۳۵۶	۲;۴,۱
۳۵۷	-۰;۶,۱	۳۵۷	۲;۶,۱	۳۵۷	۲;۲,۱
۳۵۸	-۰;۴,۱	۳۵۸	۲;۴,۱	۳۵۸	۲;۰,۰
۳۵۹	-۰;۲,۱	۳۵۹	۲;۲,۱	۳۵۹	۱;۵۷,۵۹
۰	۰;۰,۰	۰	۲;۰,۰	۰	۱;۵۳,۵۹
۱	۰;۲,۱	۱	۱;۵۷,۵۹	۱	۱;۵۱,۵۹
۲	۰;۴,۱	۲	۱;۵۵,۵۹	۲	۱;۵۱,۵۸
۳	۰;۶,۱	۳	۱;۵۳,۵۹	۳	۱;۴۹,۵۸
۴	۰;۸,۲	۴	۱;۵۱,۵۸	۴	۱;۴۷,۵۸
۸۶	۱;۵۸,۳۰	۸۶	۰;۱,۳۰	۸۶	۰;۱,۱۰
۸۷	۱;۵۸,۴۱	۸۷	۰;۱,۱۹	۸۷	۰;۱,۲
۸۸	۱;۵۸,۵۰	۸۸	۰;۱,۱۰	۸۸	۰;۰,۵۶
۸۹	۱;۵۸,۵۸	۸۹	۰;۱,۲	۸۹	۰;۰,۵۲
۹۰	۱;۵۹,۴	۹۰	۰;۰,۵۶	۹۰	۰;۰,۵۰
۹۱	۱;۵۹,۸	۹۱	۰;۰,۵۲	۹۱	۰;۰,۵۲
۹۲	۱;۵۹,۱۰	۹۲	۰;۰,۵۰	۹۲	۰;۰,۵۷
۹۳	۱;۵۹,۸	۹۳	۰;۰,۵۲	۹۳	۰;۱,۴
۹۴	۱;۵۹,۳	۹۴	۰;۰,۵۷	۹۴	۰;۱,۱۲

اگر ما در نظر داشته باشیم که آنچه که کوشیار "طول متوسط خورشید" می نامد، در واقع طول متوسط جا بجایی خورشید می باشد، در آن صورت مطابقت رضایت بخشی بین جدول تعدیل زمان او و محاسبه مجدد خود می یابیم، مشروط بر اینکه قواعدی را که او در زیج خود طرح کرده است، رعایت نماییم (وان دالن ۱۹۹۳، صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹).

تغییر مقدار در جدول تعدیل زمان خوارزمی

بر خلاف جدول تعدیل زمان در زیج کوشیار، انتظار می‌رود که متغیر مستقل در جدول خوارزمی طول حقیقی خورشید باشد. اگرچه تعدیل شمسی در زیج خوارزمی از نوع جا بجایی که در فوق به آن اشاره شد، نیست، ولی مع الوصف می‌تواند در خور این باشد که مورد بررسی قرار گیرد تا دریابیم که آیا مقادیر تعدیل زمان او جایگزین شده‌اند یا خیر. برای مقدار معین جایگزینی Δ(shift) طول حقیقی جایگزین شدهٔ خورشیدرا λ_s را تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_s = \lambda - \Delta$$

تعدیل زمان جایگزین شده E_s را می توان به مثابه تابعی از λ_s به صورت زیر نوشت:

$$E_s(\lambda_s) = E(\lambda_s + \Delta)$$
$$= 1/15.(\lambda + \Delta + q(\lambda_s + \Delta) - a(\lambda_s + \Delta) + c)$$

یعنی اینکه تابع مورد نظر، با به عقب بردن کلیه مقادیر Δ از تعدیل "منظم" زمان مشتق می شود. ولی در نتیجه عقب بردن، برخی از خواص تعدیل زمان به مثابه تابعی از طول حقیقی خورشید، که ما آنرا بر اساس تناسبات تقارنی زاویهٔ بعد و تعدیل شمسی، اشتقاق کرده بودیم، دیگر تحقق پیدا نمی کنند و به عبارت دیگر فرمول های ۷، ۸ و ۱۱ اعتبار خود را از دست می دهند. حال فرمول ۱۱ فقط به طور تقریبی معتبر است و فرمول ۸، تعدیل جایگزین شدهٔ شمسی را به صورت زیر به دست می‌دهد:

$$q(\lambda_s + \Delta) = 7.1/2.\ (E_s(\lambda_s) - E_s(180 + \lambda_s)$$

و ما به جای فرمول ۷، برای هر مقداری از λs فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$\alpha(\lambda_s + \Delta) - (\lambda s + \Delta) = c - 7.1/2(E_s(\lambda_s) + E_s(\lambda_s + 180^\circ) \qquad (۱۲)$$

از آنجا که $(\lambda s + \Delta)$ برابر است با λ و هرگاه λ مضربی از ۹۰° باشد، $a(\lambda) - \lambda = 0$ خواهد بود، در نتیجه باید انتظار داشته باشیم که سمت راست فرمول ۱۲ هر زمان که λs مضربی از (Δ - ۹۰°) باشد، برابر با صفر شود. از آنجا که ما معمولاً مقدار دقیقی برای c در اختیار نداریم، دیگر لازم نیست که مقادیری از λs که به ازای آنها سمت راست فرمول ۱۲ دقیقا برابر با صفر می شود، آرگومنت‌های جدول ما باشند.

این ویژگی به ما اجازه می دهد که بتوانیم در حالات استثنایی، میزان تغییر مقدار در جدول را تعیین نماییم.

یک روش مؤثرتر برای تعیین جایگزینی، این است که ما مقدار آنرا به مثابه پنجمین پارامتر تعدیل زمان در مد نظر داشته باشم و آنرا به تقریب همراه با دیگر پارامترهای بنیادین، به کمک روش کمترین مربعات، محاسبه نماییم. هرگاه ما فرض کنیم که متغیر مستقل در جدول المجریطی چیزی جز طول حقیقی جایگزین شدهٔ خورشید نیست، در آن صورت نتایج زیر را به دست خواهیم آورد:

تعدیل زمان خوارزمی (جداول سوتر ۶۸ ـ ۶۷)

کمترین مربعات برآوردها از مقادیر آرگومنت‌ها ۱، ۲،...،۳۶۰.

آخرین نتایج (پس از ۳ بار تکرار)

پارامتر	برآورد	فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪
اریبی	۲۳;۵۱،۵۱،۲،۴۱،۳۲	<۲۳;۵۱،۲۱،۸،۱۰،۳۶، ۲۳;۵۲،۲۰،۵۶،۳۷،۱۱>
خروج از مرکزی	۲;۲۹،۵۰،۲۸،۱۸،۵۳	<۲;۲۹،۴۳،۳۳،۲۳،۳۷، ۲;۲۹،۵۷،۲۳،۱۴،۸>
حضیض	۲;۳۹،۳،۵۳،۳۰،۱۹	<۸۲;۳۶،۸،۴۸،۱،۳، ۸۲;۴۱،۵۸،۵۸،۵۹،۳۵>
ثابت دوره	۴;۳۰،۳،۰،۰،۰	<۴;۲۹،۵۸،۱۹،۳۸، ۵۲،۴;۳۰،۷،۴۰،۲۱،۸>
جایگزینی	-۲;۱،۲۹،۲۸،۹،۱۱	<-۲;۲،۴۳،۲۳،۲،۳۹، -۲;۰،۱۵،۳۳،۱۵،۴۳>

انحراف معیار تفاضل ها: ۰;۰،۳۰،۵۵،۵۹۴۴

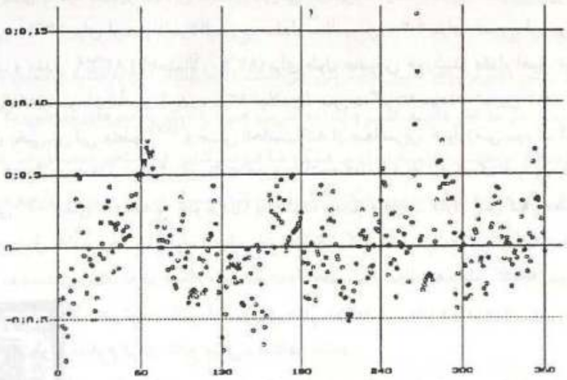
نخست مشاهده می کنیم که کمترین مقدار ممکن برای انحراف معیار تفاضل‌ها بین جدول خوارزمی و مقادیری که بر اساس فرض جایگزینی محاسبه شده‌اند، خیلی کمتر است از انحراف معیارهایی که ما قبلاً به دست آورده بودیم. در واقع، انحراف معیاری که در اینجا به دست آمده، فقط دو برابر مقدار ۰;۰،۱،۲۸ می‌باشد، و این به این معنا می تواند باشد که ما تابع بنیادین صحیح را برای جدولی که تمام مقادیر آن مضاربی از چهار ثانیه می‌باشند، انتخاب کرده ایم.

دوم، اینکه متوجه می شویم که کمترین مربعات برآوردها برای تعدیل جایگزین شده زمان،

قرابت زیادی با کلیه مقادیر بنیادین محتمل تاریخی پارامترها دارند. مثلاً با مقدار بطلمیوس و خوارزمی ۲۳°۵۱َ برای اریبی دایرة البروج، مقدار بطلمیوس ۲;۳۰ برای خروج از مرکزی خورشید، و مقدار ۸۲°۳۹َ (یا احتمالاً ۸۲°۴۰َ) برای طول حضیض خورشید. مقدار اخیر، توسط رصدهایی که به فرمان مأمون (حدود ۸۳۰ میلادی) صورت گرفته بودند، تعیین شده و در زیج‌های یحیی بن ابی منصور(۸۷) و حبش الحاسب که از معاصرین خوارزمی بودند، از آن استفاده شده است. مقدار ۴;۳۰ برای ثابت دوره، با آنچه که ما قبلاً به کمک فرمول ۱۱، و جایگزینی ۲°- (یعنی ۲ درجه به جلو بردن) پیدا کرده بودیم، مطابقت دارد. این که بعضی از مقادیر محتمل پارامتر، خارج از فواصل اطمینان ۹۵٪ قرار گرفته‌اند، می‌تواند ناشی از اشتباهات کوچک روشمندی باشند که در هنگام محاسبه جدول صورت گرفته‌اند. همانطور که قبلاً هم ذکر شد، اینگونه اشتباهات می‌توانند ناشی از درونیابی خطی در تعدیل زمان و یا درونیابی در جداول زیربنایی آن، و یا مقطوع کردن نتایج میانی و امثالهم باشند.

هرگاه ما جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی را برای مقادیر تاریخی و محتمل پارامتر، مجددا محاسبه نمائیم، مشاهده خواهیم کرد که تفاضل های بین آن جدول و محاسبه انجام شده، به طور کلی کمتر از ۷ ثانیه بوده و هیچگونه الگوی کلی را نشان نمی دهند (نگاه کنید به جدول های ۴آ و ۴پ و تصویر شماره ۸). چند الگوی مکانی در این تفاضل ها وجود دارند (مثلاً برآمدگی های کوچک حول آرگومنت‌های ۶،۶۵ و ۲۱۶ و همچنین برآمدگی بزرگتری ۲۶۶° دیده می‌شود). این الگوها می توانند نشانگر اشتباهات روشمند کوچکی باشند که در بالا به آنها اشاره شد. لیکن الگوی کلی تفاضل ها به حد کافی اتفاقی هست تا بتوان نتیجه گرفت که مقادیر محتمل تاریخی پارامتر که قبلاً پیدا کردیم، واقعاً برای محاسبه جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی، به کار گرفته شده‌اند.

استفاده از روش کمترین مربعات (به طور غیر مستقیم) تأیید می‌کند که در جدول خوارزمی، تعدیل زمان به مثابه تابعی از طول حقیقی خورشید بیان شده است. ضریب تبدیلی که به کار برده شده، ۱۵ درجه در ساعت می‌باشد. هرگاه ما روش کمترین مربعات را برای تعدیل زمان به مثابه تابعی از طول متوسط جایگزین شدهٔ خورشید به کار بریم، در آن صورت کمترین انحراف معیار ممکن را به میزان ۱۹ ثانیه به دست خواهیم آورد و تفاضل‌های بین جدول خوارزمی و جدول محاسبه شده، الگوهای مشخص سینوسی نشان خواهند داد.



تصویر شماره ۸: نمودار تفاضل های بین مقادیر تعدیل زمان در جدول خوارزمی و آخرین محاسبه ما بر مبنای این فرض که مقادیر جدولی جایگزین شده باشند.

هرگاه ما فرض کنیم که ضریب تبدیل به جای ۱۵ درجه، ۱۵;۲،۲۸ درجه باشد، در آن صورت کمترین انحراف معیار ممکن تفاضل ها باز هم ۳ ثانیه بوده و تفاضل‌های مزبور نیز همانطور اتفاقی خواهند بود که برای ضریب تبدیل ۱۵ درجه هستند. با این تفاوت که کمترین مربعات برآوردها، از مقادیر محتمل تاریخی دور خواهند بود.

با فرض اینکه مقدار جایگزینی در جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی دقیقاً ۲°- باشد، ما می‌توانیم به سهولت تعدیل زمان "منظم" بنیادین را دوباره محاسبه نمائیم. بر اساس همین جدول نیز می توانیم زاویهٔ بعد و تعدیل شمسی را طبق فرمول های ۷ و ۸ حساب کنیم. آنگاه معلوم خواهد شد که هر دو جدول تعداد زیادی اشتباهات کوچک با علامات مشترک دارند و این امر نمایانگر وجود سرچشمه‌ای برای این چنین اشتباهات می باشد. من شخصاً قادر نبوده‌ام این سرچشمه را پیدا کنم، لیکن احتمال می‌رود همانی باشد که موجب پیش آمدن الگوهای مکانی در تفاضل‌های بین جدول های ۴آ تا ۴پ و نمودار تصویر شماره ۸ می شود و من قبلاً به آن اشاره کردم.

جدول شماره ۴آ: مقادیر خوارزمی برای تعدیل زمان

(T(λ و تفاضل های بین مقادیر او و جدیدترین محاسبات (قسمت اول)

λ	T(λ)	diff	λ	T(λ)	diff	λ	T(λ)	diff	λ	T(λ)	diff
241	31, 8	+5	271	17,16	−3	301	3,28		331	0,24	−1
242	30,48	+4	272	16,44	−3	302	3, 8	−1	332	0,32	
243	30,28	+4	273	16,12	−2	303	2,48	−4	333	0,40	+1
244	30, 4	+1	274	15,40	−2	304	2,32	−3	334	0,48	
245	29,40	−2	275	15, 8	−2	305	2,16	−3	335	0,56	−1
246	29,20		276	14,36	−2	306	2, 0	−3	336	1, 4	−3
247	28,56	−1	277	14, 4	−2	307	1,48	−1	337	1,16	−1
248	28,36	+2	278	13,32	−2	308	1,36		338	1,28	−1
249	28,12	+2	279	13, 4	+1	309	1,24	+1	339	1,40	
250	27,44	−1	280	12,32		310	1,12	+1	340	1,52	−1
251	27,16	−4	281	12, 4	+3	311	1, 3	+3	341	2, 4	−2
252	26,52	−2	282	11,36	+6	312	0,52	+2	342	2,20	
253	26,28	+1	283	11, 4	+4	313	0,40	−1	343	2,36	+2
254	26, 0		284	10,36	+6	314	0,32	−1	344	2,52	+3
255	25,32		285	10, 8	+7	315	0,24	−1	345	3, 4	
256	25, 4		286	9,36	+4	316	0,16	−3	346	3,20	
257	24,36	+1	287	9, 8	+5	317	0,10	−3	347	3,36	−1
258	24, 8	+2	288	8,40	+5	318	0, 6	−3	348	3,52	−2
259	23,36		289	8,12	+4	319	0, 4	−1	349	4,12	+1
260	23, 4	−2	290	7,44	+3	320	0, 2		350	4,28	−1
261	22,36		291	7,16	+2	321	0, 1	+1	351	4,48	+1
262	22, 8	+3	292	6,52	+3	322	0, 0	+1	352	5,12	+6
263	21,36	+2	293	6,28	+4	323	0, 1	+3	353	5,32	+7
264	21, 8	+5	294	6, 0	+1	324	0, 2	+3	354	5,48	+3
265	20,40	+8	295	5,32	−3	325	0, 4	+4	355	6, 8	+3
266	20,16	+16	296	5, 8	−4	326	0, 6	+4	356	6,28	+3
267	19,40	+12	297	4,48	−2	327	0, 8	+3	357	6,48	+3
268	19, 0	+4	298	4,28		328	0,10	+1	358	7, 8	+2
269	18,24		299	4, 8	+1	329	0,14	+1	359	7,28	+1
270	17,52	+1	300	3,48	+1	330	0,20	+1	360	7,48	

جدول شماره ۴ب: مقادیر خوارزمی برای تعدیل زمان

(T(λ و تفاضل های بین مقادیر او و جدیدترین محاسبات (قسمت دوم)

λ	T(λ)	diff	λ	T(λ)	diff	λ	T(λ)	diff	λ	T(λ)	diff
121	14,40	−7	151	17,48	−7	181	27, 8	−1	211	34, 8	−1
122	14,40	−5	152	18, 4	−6	182	27,28		212	34,12	−3
123	14,40	−3	153	18,20	−5	183	27,44	−4	213	34,16	−4
124	14,40	−1	154	18,40		184	28, 4	−2	214	34,20	−4
125	14,40	−1	155	19, 0	+4	185	28,24	−1	215	34,22	−5
126	14,40	−1	156	19,16	+3	186	28,40	−4	216	34,24	−5
127	14, 0	−1	157	19,32	+2	187	29, 0	−2	217	34,26	−5
128	14,41	−1	158	19,48	+1	188	29,20		218	34,27	−5
129	14,42	−2	159	20, 4		189	29,36	−1	219	34,28	−4
130	14,44	−2	160	20,24	+2	190	29,52	−3	220	34,28	−3
131	14,48	−2	161	20,44	+4	191	30, 8	−4	221	34,27	−3
132	14,52	−1	162	21, 0	+2	192	30,28		222	34,26	−1
133	14,56	−1	163	21,20	+3	193	30,44	−1	223	34,24	
134	15, 0	−2	164	21,40	+5	194	31, 4	+4	224	34,20	
135	15, 4	−4	165	21,56	+2	195	31,20	+4	225	34,16	+1
136	15,10	−4	166	22,16	+3	196	31,32	+1	226	34,12	+3
137	15,20	−1	167	22,36	+3	197	31,44	−1	227	34, 4	+1
138	15,28		168	22,52		198	32, 0	+1	228	33,56	
139	15,36		169	23,12		199	32,12	−1	229	33,48	+1
140	15,44	−1	170	23,32		200	32,24	−2	230	33,36	−2
141	15,52	−2	171	23,52	+1	201	32,40	+2	231	33,28	
142	16, 0	−4	172	24,16	+5	202	32,52	+2	232	33,16	−1
143	16, 8	−6	173	24,36	+5	203	33, 4	+3	233	33, 4	−2
144	16,20	−5	174	24,52	+1	204	33,16	+4	234	32,52	−1
145	16,32	−4	175	25,12	+1	205	33,24	+2	235	32,40	
146	16,48		176	25,32	+1	206	33,32		236	32,28	+2
147	17, 0		177	25,52	+1	207	33,40	−1	237	32,12	+1
148	17,12	−1	178	26,12	+2	208	33,48	−1	238	31,56	+1
149	17,24	−3	179	26,32	+2	209	33,54	−2	239	31,40	+2
150	17,36	−4	180	26,52	+2	210	34, 0	−3	240	31,24	+3

جدول شماره ۴ب: مقادیر خوارزمی برای تعدیل زمان
(T(λ و تفاضل های بین مقادیر او و جدیدترین محاسبات (قسمت سوم)

۷. نتیجه گیری

تجزیه و تحلیل ریاضی جدول تعدیل زمان در ترجمه لاتین نسخهٔ المجریطی زیج سندهند خوارزمی، منتج به نتایج زیر شده است:

الف) متغیر مستقل جدول، طول حقیقی خورشید بوده و منطبق با توضیحات مندرج در ترجمهٔ لاتین نسخهٔ المجریطی می‌باشد.

ب) ضریب به کار برده شده برای تبدیل درجات استوایی به ساعات، ۱۵ درجه در ساعت می باشد. این نکته را می‌توان از اینجا نتیجه گرفت که کلیه مقادیر جدولی، ضرایبی از چهار ثانیه می باشند. این نکته با استفاده از روش کمترین مربعات تأیید نیز می‌شود.

پ) مقدار بنیادین اریبی دایرة البروج ′۲۳°۵۱ مقدار، زیربنای جداول میل خورشید و زاویه بعد در نسخهٔ المجریطی و رقم سرراست شدهٔ مقدار ″۲۳°۵۱′۲۰ می‌باشد که توسط بطلمیوس در المجسطی و جدولهای دستی وی به کار برده شده است.

ت) تعدیل شمسی بر اساس نظریه شمسی بطلمیوس محاسبه شده است. مقدار خروج از مرکزی بطلمیوس ۲;۳۰ می‌باشد که با یک تعدیل ماکزیمم به میزان ′۲°۲۴ مطابقت دارد. جدول تعدیل شمسی در نسخهٔ المجریطی، منشأ هندی ـ ایرانی دارد و بر اساس یک تعدیل ماکزیمم به میزان ′۲°۱۴ تدوین شده است.

ث) طول حضیض خورشید ′۸۲°۳۹ می‌باشد و توسط گروهی از منجمین که در دربار مأمون (حدود ۸۳۰ میلادی) به کار مشغول بودند، تعیین شده است.[۲۳] باید توجه داشت که نه مقدار هندی ′۷۷°۵۵ که در دستورالعمل‌های المجریطی برای محاسبه طول حقیقی خورشید ذکر شده و نه مقدار بطلمیوس ′۶۵°۳۰ در اینجا به کار رفته‌اند. به نظر طبیعی می رسد که طول قدیمی و بطلمیوسی حضیض خورشید، توسط نتایج رصدهای پس از او جایگزین شده باشد. و اگر چنین باشد، باید همین عمل هم با مقدار خروج از مرکزی خورشید انجام شده باشد (ماکزیمم تعدیل شمسی که توسط منجمین مأمون تعیین شده بود، ′۱°۵۹ است).

ج) مقدار بنیادین ثابت دوره ′۴°۳۰ می‌باشد. همانگونه که مشاهده کردیم، ثابت دوره به نحوی تعیین شده بود که مینیمم تعدیل زمان برابر با صفر شود. از آنجا که این مینیمم برای آرگونت °۳۲۲ (°۲۲ حمل) صورت می‌گیرد که مطابق آرگومنت °۳۲۰ جدول جایگزین نشده

۲۳. با توجه به فواصل اطمینان ٪۹۵ که در بالا مطرح شد، ما نمی‌توانیم از بین مقدار ′۸۲°۳۹ که در زیج‌های یحیی بن ابی منصور و حبش حاسب به کار برده شده و مقدار سر راست شده ′۸۲°۴۰ که در زیج حبش مشاهده می‌شود، یکی را انتخاب کنیم (نگاه کنید به دبار نو ۱۹۸۷، صفحه ۵۸).

می‌باشد، انتظار می رود که $c \approx a(320) - 320 + q(320 - \lambda_A)$ باشد (مقایسه کنید با فرمول ۴). با مقادیر پارامتر که در بالا به دست آمده اند، ثابت دوره برابر $c \approx$ ۴:۳۰،۲۲ می‌شود که سرراست شدهٔ آن ۴:۳۰ خواهد بود.

ح) مقادیر تعدیل زمان در نسخهٔ المجریطی به میزان ۲ درجه به جلو برده شده‌اند، این بدین معنا است که مقدار واقعی تعدیل زمان برای صفر درجه، هنگامی به دست می آید که آرگومنت ۲° باشد؛ و برای برای یک درجه، وقتیکه آرگومنت ۳° باشد و الی آخر. من قادر نبوده ام توضیح قانع کننده‌ای برای این جایگزینی بیابم، اما نویگه باوئر توضیح می‌دهد که چه جایگزینی کوچکی در طول خورشید لازم است تا بتوان مینیممی برای تعدیل زمان برابر صفر به دست آورد (۱۹۶۲، صفحات ۶۴ و ۶۵). مقدار این جایگزینی به نظر او کمتر از یک درجه می‌باشد. از این‌ها گذشته، هیچ دلیلی وجود ندارد که طبق آن بپذیریم که جدول تعدیل زمان در زیج خوارزمی، متعلق به مجموعه ای از آنگونه جداول شمسی باشد که مثلاً مانند جدول کوشیار بر اساس تعدیل جایگزین شده تدوین شده اند. از آنجا که ماکزیمم تعدیل شمسی طبق محاسبات خوارزمی ۲°۲۴′ می‌باشد، او می‌بایستی در واقع مقداری بیشتر از ۲° برای جایگزینی انتخاب کرده باشد.

از آنچه که در بالا آمد می‌توان نتیجه گرفت که جدول تعدیل زمان در ترجمهٔ لاتین نسخهٔ المجریطی زیج سندهند خوارزمی، از جمله جداول بطلمیوسی است که به احتمال زیاد توسط خوارزمی تدوین شده است (نگاه کنید به گروه I - پ در بخش چهارم مقالهٔ حاضر). جدول مزبور بر اساس مقادیر بطلمیوسی برای اریبی و خروج از مرکزی خورشید تهیه شده و مانند جدول تعدیل زمان در جدول‌های دستی بطلمیوس، دارای مینیممی برابر صفر می باشد. طول حضیض خورشید در این جدول، همان مقداری است که توسط منجمین دستگاه خلافت مأمون محاسبه شده و در اولین رساله‌های نجومی اسلامی (که بیشتر بر اساس مدل سیارات بطلمیوس تنظیم می شدند)، به کار رفته است. مع الوصف نمی‌توان کاملاً مطمئن بود که این جدول توسط خوارزمی محاسبه شده باشد، زیرا هیچ یک از منابعی که در بخش سوم این مقاله از آنها نام برده شده است، اشاره‌ای به یک جدول تعدیل زمان در نسخه اصلی زیج خوارزمی نمی‌کنند. اما در هر صورت می‌توان این نتیجه را گرفت که یا کل این جدول و یا مقادیر بنیادین پارامتر آن، از شرق اسلام به غرب اسلام انتقال یافته است.

ابراز تشکر

برای من مایه مسرت بسیار است که از پروفسور ژوآن ورنه Juan Vernet و دیگر

اعضای دانشکدهٔ علوم عربی Departamento de Arabe بخاطر میهمان نوازی گرمی که در دیدارهای سه گانهٔ من از بارسلونا Barcelona به عمل آوردند، تشکر نمایم.

همچنین مایلم از دکتر فریتز سابی پدرسن Fritz Saaby Pedersen در کپنهاک، برای اطلاعات مفیدی که دربارهٔ خوارزمی و جدول‌های طلیطلی در اختیارم گذارند و نیز مباحثات لذت بخشی که از طریق پست الکترونیکی با یکدیگر داشتیم، سپاسگزاری نمایم. تعبیر و تفسیر های مفید پروفسور دیود آ. کینگ David A. King و سیلکه آکرمان Silke Ackermann (هر دو در فرانکفورت) مرا قادر ساختند تا پیشرفت‌های چشمگیری در چند بخش از این مقاله به دست آورم.

من ابتدا نتایج مندرج در این مقاله را در نوزدهمین کنگرهٔ بین المللی تاریخ علوم در شهر ساراگوسا (اسپانیا) *XIXth International Congress of History of Science in Zaragoza* در ماه اوت ۱۹۹۳ ارائه نمودم. اقامت من در ساراگوسا، توسط سازمان هلندی پژوهش های علمی Organization for Scientific Research (NOW) Netherlands The و کانون استیشینگ ریاضیات شهر آمستردام Stiching Mathematisch Centrum (Amesterdam) ممکن گردید. این مقاله در طی اقامت من در فرانکفورت که مخارج آنرا بنیاد آلکساندر فون هومبولت Alexander von Humboldt Fondation به عهده گرفت، به اتمام رسید.