حال اگر فرض کنیم $D\hat{J}I = \theta$ داریم:

$$\sin\theta = x = \frac{\sqrt{۳} - ۱ + \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\hat{J} = ۲\theta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۶\sqrt{۳} - ۴}}{۴}\right) \Rightarrow \hat{J} = ۱۰۹^{\circ}۱۱'۳۲''$$

در حالی که هر یک از زوایای یک پنج‌ضلعی منتظم مساوی ۱۰۸° است نتیجه:

از این سه ترسیم نتیجه می‌شود که ترسیم ابوالوفا، هم ساده است زیرا که با یک خط‌کش و یک پرگار با دهانه ثابت انجام می‌گردد، و هم دقیق است، چرا که یک پنج‌ضلعی منتظم را بدست می‌دهد. پس ترسیمی است زیبا.

ترسیم دورر از ترسیم ابوالوفا ساده‌تر است لیکن دقیق نیست و تنها یک پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع بدست می‌دهد. ترسیم داوینچی نه سادگی دو روش پیشین را دارد و نه دقت ترسیم ابوالوفا را. این ترسیم یک پنج‌ضلعی منتظم بدست نمی‌دهد.

دگرگونی مفهوم هندسه در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم[۱]

سیاوش شهشهانی

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده علوم ریاضی

چکیده

گذر از یک هندسهٔ مطلق (اقلیدسی) به انواع هندسه‌ها طی چند قرن صورت گرفت. پذیرش هندسه‌های جدید نیاز به یک نگرش اساسی به موضوع ریاضیات به طور عام و موضوع هندسه به طور خاص داشت. این نگرش در قرن نوزدهم صورت گرفت و موجب تحولی در هندسه گردید. در مقالهٔ حاضر استدلال می‌شود که سخنرانی سال ۱۸۵۴ را می‌توان نقطهٔ عطفی در این دگرگونی هندسه قلمداد کرد.

کلید واژه‌ها هندسه اقلیدسی، هندسه نااقلیدسی، فضا زمان، کانت، پیوستار، ریمان، بُعد.

در نیمه دوم قرن نوزدهم دگرگونیهایی بنیادی در دیدگاه ریاضیدانان نسبت به ماهیت وجودی اشیاء مورد بحث در ریاضیات صورت گرفت که نهایتاً در پایان آن قرن و اوایل قرن بیستم منجر به بازسازی اشیاء ریاضی در چارچوب نظریهٔ مجموعه‌های کانتور گردید. طی بیست و چند قرن تاریخ ثبت شدهٔ ریاضیات تا نیمهٔ دوم قرن نوزدهم، ریاضیات اساساً یکی از علوم طبیعی بود هر چند که درجه یقین بی‌همتای دانش ریاضی و مؤثر بودن استثنایی قدرت تعقل در پیشبرد آن، ریاضیات را به حدّی از سایر دانشها متمایز می‌ساخت که افلاطون برای اشیاء

۱. خلاصهٔ سخنرانی در اولین کارگاه تاریخ ریاضیات، ۲۴ ـ ۲۱ مهر ۱۳۸۳، دانشگاه شهید بهشتی، زیراب ـ مازندران.

ریاضی جایگاهی فرای جهان مادّی در دنیای مُثُل قائل بود. با این وجود در اینکه دانش ریاضی نهایتاً متعّهد به جهان عینی است، چه عالی‌ترین تجلی آن (افلاطون) و چه برگرفته‌ای از آن (ارسطو)، تردیدی نبود. آنچه را که هیلبرت «بهشت کانتور» خوانده است از دیدگاهی به «بهشت مُثُل افلاطونی» می‌ماند با این تفاوت فلسفی مهم که مُثُل افلاطونی از دیدگاه افلاطون واقعی‌ترین و مطلق‌ترین پدیده‌های جهان عینی بودند ولی بهشت کانتور از دیدگاه اکثر ریاضیدانان اواخر قرن نوزدهم به بعد یک مصنوع ذهن انسان محسوب شده است.

اولین بخش ریاضیات که در آن مقوله وجود به صراحت دستخوش دگرگونی شد هندسه بود. در واقع این یکی از نمونه‌های نادر در تاریخ علم است که می‌توان روی یک اثر خاص به عنوان «مانیفست» دگرگونی کامل در دیدگاه فلسفی نسبت به یک علم انگشت نهاد. مقصود ما اثر ریمان زیر عنوان «فرضهایی که هندسه بر آن متّکی است» می‌باشد که ریمان ۲۸ ساله در مراسم پذیرفته شدن به عنوان مدرّس[2] در دانشگاه گوتینگن در تاریخ ۱۰ ژوئن ۱۸۵۴ ایراد کرد و مکتوب آن به فاصله کوتاهی پس از مرگ او در سال ۱۸۶۶ به چاپ رسید. در اینجا منظور ما این نیست که اثر ریمان بدون پیش زمینه و به طور ناگهانی بر او و جامعه علمی نازل شد، بالعکس مانند هر انقلاب علمی دیگر، این اثر پاسخگوی طبیعی معضلات و بحرانهایی بود که حدود دو قرن پیشرفت چشمگیر در هندسه، ریاضیات را با آن مواجه ساخته بود. آنچه این اثر را به عنوان نقطهٔ عطف بلامنازع در این جریان ممتاز می‌سازد، از یک سو راهکار فنی ریاضی نوینی است که ریمان در این اثر برای نسلهای بعدی ریاضیدانان و دانشمندان علوم طبیعی به میراث گذاشت، و از سویی دیگر صراحت حواشی فلسفی اوست که آگاهی کامل وی بر آنچه را که دامن زده بود آشکار می‌سازد. همانطور که او خود اذعان می‌کند، ریمان از ابزار ریاضی نیرومندی که ریاضیدانان پیشین مانند استاد او گاوس برای برخورد با مسائل هندسی پدید آورده بودند آگاه بود، قطعاً در جریان بحران و جنجال پیرامون هندسه‌های نااقلیدسی قرار داشت، و بر نظرات فلسفی کانت دربارهٔ فضا ـ زمان و نظرات فلسفی مخالف کانت که در آلمان، بخصوص گوتینگن، جاری بود وقوف کامل داشت. قبل از ریمان، این دیدگاه کلاسیک در مورد هندسه، که موضوع این شاخه از معرفت بررسی فضای مادی و اشکال موجود در آن است همچنان بر ریاضیات و فلسفهٔ ریاضی حاکم بود. از طرفی دیگر تحقیقات منسجم و زیبایی که در

2. Habilitation.

نوعی هندسه نااقلیدسی رقم خورده بود تردیدهایی در مورد توان استدلال ریاضی و شهود کانتی در کشف حقایق فضای مادّی پدید آورده بود، و بعضی فلاسفه بالاخص یوهان هربات[3]، سلف ریمان در دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه گوتینگن، لزوم بررسی کمیات متصّل به غیر از فضا ـ زمان، مانند رنگها، را مطرح کرده بودند.

ریمان در اثر مورد بحث سه اصل زیر را مطرح می‌سازد:

۱) موضوع هندسه بررسی کمیاب متّصل از هر تعداد بُعد است و به فضای سه بُعدی محدود نمی‌شود. پدیده‌ای که برای توصیف آن به n پارامتر عددی (مقصود عدد حقیقی، یعنی کمیت پیوسته است) نیاز داشته باشیم یک خمینه (Manifold) n- بُعدی تشکیل می‌دهد. ریمان حتی امکان بررسی خمینه‌های بی‌نهایت بُعدی را مطرح ساخت.

۲) خمینهٔ n- بُعدی به طور ذاتی مجهز به ساختار هندسی (طول، زاویه، حجم، انحناء...) منحصر به فردی نیست، بلکه بی‌نهایت نوع هندسه می‌پذیرد که ریمان روشهای ریاضی را برای مجهز ساختن خمینه به ساختار هندسی ارائه کرد. به زبان امروزی، ریمان نشان داد چگونه انتخاب یک مفهوم «نُرم» یا طول بردارهای مماس ساطع از نقطهٔ خمینه، منجر به توصیف مفاهیم هندسی می‌شود. از میان این روشها ریمان خود نُرم القاء شده از یک مفهوم «ضرب داخلی» به دلیل «ساده‌تر بودن» را مورد تأکید قرار داد (چیزی که امروز به «متریک ریمانی» معروف شده است). بعدها هلم هولتس نشان داد تنها با این نوع انتخاب، هندسه از غنای تقارنی کافی برای بعضی مقاصد برخوردار می‌شود.

۳) در مورد فضای سه بعدی مادی حادث، ریمان خاطر نشان ساخت که تعیین هندسه حاکم بر آن اصلاً موضع ریاضیات نیست بلکه به اصول فیزیک و نهایتاً تجربه و مشاهده باید ارجاع شود. در پاراگرافهای پایانی اثر ریمان، اشاراتی به امکان وجود رابطه تنگاتنگ میان خواص هندسی مانند انحنا و پدیده‌های فیزیکی وجود دارد.

باید در اینجا اضافه شود که سخنرانی ریمان، همچنان که رسم بود، در جمع همهٔ اساتید و دانشجویان دانشکدهٔ فلسفهٔ دانشگاه گوتینگن (که شامل بخش ریاضی نیز بود) ایراد شد و تقریباً خالی از فرمول و ریزه کاریهای فنی ریاضی بود. این جنبهٔ کار، منجمله توصیف تانسور انحناء، در

3. Johann Herbart (1777 - 1855).

یک اثر بعدی ریمان، که به اثر پاریس[4] معروف شده است، و آن نیز پس از مرگ زود رس ریمان به چاپ رسید، به طور مبسوط مورد بحث قرار گرفت. ریاضیدان انگلیسی کلیفورد[5] و ریاضیدانان ایتالیایی ریچی[6] و لوی چیویتا[7]، پس از مرگ ریمان، در اشاعه و توسعه افکار هندسی ریمان نقش برجسته‌ای دارند. همانطور که در آغاز اشاره شد، دگرگونی پارادیم مقولهٔ وجود در ریاضیات، که اولین نمونه آن در کار هندسی ریمان مشاهده می‌شود، تدریجاً در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم در ریاضیات همه‌گیر شد و جایگاه سنّتی ریاضیات به عنوان یکی از علوم طبیعی که موضوع آن بررسی پاره‌ای از خواص جهان موجود است، به معرفتی که موضوع آن ایجاد زبان و چارچوب مناسب برای بررسی همهٔ‌جهانهای ممکن است مبدّل شد. رشد کامل و پذیرفته شدن دیدگاه ریمان، که خود یکی از اولین آثار این حرکت است، نهایتاً در این چارچوب کلّی‌تر ریاضیات میّسر گردید.

مراجع

1. Gillies, D. (ed.) *Revolutians in Mathematics* Clarendon Press, 1992.
2. Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern times* Oxford U.Press 1972.
3. Kuhn, T. *The structure of scientific revolutions* U. Chicago Press (1962, 1970).
4. Laugwitz, D. *Bernhrd Riemann (1826 - 1866),* Birkhäuser 1996.
5. Nowak, G., Riemann's *Habilitaliansvortrag* and the synthetic *A Priori* status of Geometry, in *The history of modern mathematics* (vol.1) Ed. by D. Rowe and J.McCleary, Academic Press, 1989.
6. Riemann, B. *Gesammelte mathematische werke und wissenschaftlicler Nachlass*

---

4. Parisarbeitung.
5. William Chifford (1845 - 1879).
6. Gtegoise Ricci- Curbastro (1853 - 1975).
7. Tullio Levi - Civita (1873 - 1941).

مجموعهٔ آثار ریمان که توسط دد کنید و وبر جمع‌آوری شده و اولین بار در سال ۱۸۹۲ به چاپ رسیده است شامل دو مقالهٔ ذکر شده می‌باشد. آخرین چاپ این مجموعه در سال ۱۹۹۰ مشترکاً توسط Springer و Teubner ظاهر شده است. دست کم دو ترجمهٔ انگلیسی مقالهٔ Habilitation موجود است، ترجمهٔ W.Clifford در مجلهٔ *Nature* جلد VIII، شماره‌های ۱۸۳ و ۱۸۴ به چاپ رسید و در اینترنت قابل دسترسی است. ترجمهٔ جدیدتر توسط Michael Spivak در جلد دوم از مجموعهٔ پنج جلدی او به نام A Comprehensive introduction to differential geometry آمده است.