دوران پنجمی هم حاصل شود؛ هرچند که این امر، فعلاً خیلی بعید به نظر برسد.

ضمیمهٔ ۴

ترجمه بخشی از مقدمه‌ی رسالهٔ محیطیه

بسم اللّه الرحمن الرحیم

ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است. و اندازهٔ هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمان‌ها و قرار دهندهٔ نور در تاریکی است. و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است و برخاندان و یاران پاک او باد.

اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش وی جمشید پسر مسعود پسر محمود حذف طبیب کاشانی ملقب به غیاث که خداوند احوال او را نیکو گرداند می‌گوید: «ارشمیدس ثابت کرده است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به اندازهٔ کمتر از ۷ / ۱ و بیشتر از ۷۱ / ۱۰ قطر، بزرگتر است. پس تفاوت بین این دو مقدار ۱/۴۹۷ (قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷ ذراع یا قصب یا فرسنگ باشد مقدار محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد و در فلک البروج (در محیط...) در حدود بسیار بیش از صدهزار فرسنگ مجهول است، و این مقادیر که در محیط‌ها (این اندازه) زیاد هستند در مساحت (ها) چه خواهند بود؟ این به علت آن است که وی (= ارشمیدس) محیط ۹۶ ضلعی محاط در دایره را استخراج کرده است و آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد زیرا هر ضلع آن از قوس روبروی آن کوچکتر است و مجموع اضلاع آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد و (ارشمیدس) محیط چند ضلعی دیگری را که مشابه با اولی و محیط بر (همان) دایره است استخراج کرده و به مدد قضیه اول نخستین مقالهٔ کتاب خود به ثبوت رسانیده است که آن از محیط دایره مذکور بزرگتر است و تفاوت بین آنها (= در محیط) همان است که گفته شد.

روش کاشانی برای محاسبه قوس‌ها

ایوونه دولد سمپلونیوس

مورخ تاریخ ریاضیات از مؤسسه ریاضیات دانشگاه هایدلبرگ

ترجمهٔ: علی رضا اشرفی

عضو هیئت علمی دانشگاه کاشان

و محمدرضا احمدی

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه علوم پایه دامغان

این ترجمه را به دوست دانشمندم جناب آقای دکتر جعفر آقایانی چاوشی تقدیم می‌دارم.

«علی‌رضا اشرفی»

چکیده

چهارمین بخش از کتاب مفتاح الحساب کاشانی به اندازه‌گیری شکلها و اشیاء هندسی مربوط می‌شود. این بخش با مثلث و مسائل مربوط به آن شروع شده و به اشکال هندسی سه بعدی ختم می‌شود. در این بخش است که کاشانی اندازه‌گیری قوسها و طاقها را در معماری مورد بررسی دقیق علمی قرار می‌دهد و با روشی کاملاً علمی به محاسبه آنها می‌پردازد.

کلید واژه‌ها غیاث‌الدین جمشید کاشانی، مفتاح الحساب، طاق، قوس، قبه، مقرنس، سردر.

مقدمه[۱]

غیاث الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان و ستاره‌شناسی بزرگ ایرانی فصل چهارم از مفتاح الحساب خود را به اندازه‌گیری موجودات هندسی اختصاص داده است. کتاب با مثلث و مسائل مرتبط با آن شروع می‌شود؛ بعد از اشکال مسطح با محاسبه اشکال سه بعدی ادامه یافته و در فصل نهم با اندازه‌گیری ساختارها و ساختمان‌ها پایان می‌پذیرد. کاشانی در شروع این فصل اشاره می‌کند که هدف اصلی مانند تمام مفتاح الحساب محاسبات تجربی است. او می‌نویسد: «پیشینیان صرفاً دربارهٔ اندازه‌گیری طاق و قوس صحبت کرده‌اند و به مسائل مرتبط با آنها نپرداخته‌اند. اما من این کار را کرده و برای آن روشی علمی ارائه داده‌ام که در اندازه‌گیری ساختمان‌ها بکار می‌رود». فصل به سه بخش تقسیم می‌شود.

(۱) اندازه‌گیری طاق و قوس

(۲) اندازه‌گیری قبه

(۳) اندازه‌گیری مقرنس

این سه دسته همراه با اجسام مشترکی که قبلاً در فصل چهارم بحث شده‌اند، تمام معماری اسلامی را تشکیل می‌دهند. در این مقاله من محاسبات طاق و قوس را مورد بررسی قرار می‌دهم. همانگونه که در محاسبات قُبه و مُقرنس دیده شد، کاشانی در اینجا دوباره تقریبات بسیار هوشمندانه‌ای بکار می‌برد.

این بخش شامل جدولی با ضرایب، جهت محاسبهٔ قوس به همراه جزئیات آن می‌باشد. این مقاله تحلیلی از چگونگی توسعه این ضرایب توسط کاشانی است و دقت آنها را نشان می‌دهد.

قوس، شروع معماری

کاشانی در شروع بخش محاسبهٔ قوس‌ها و طاق‌ها چنین می‌نویسد: «پیشینیان قوس و طاق را به عنوان نصف یک استوانه مستدیر تو خالی تعیین می‌کردند، ولی ما در ساختمان‌های جدید و قدیم چیزی مثل آن ندیدیم. بیشتر چیزهایی که ما مشاهده کردیم دارای طاق‌های نوک تیز بوده و در برخی حالات کوچکتر از نصف یک استوانه تو خالی بودند».

مطابق با نظر گولومبک[۲] این مشاهده درست نیست، زیرا طاق‌های تو خالی و قوس‌های

۱. مقالهٔ فوق متن سخنرانی نویسنده در کنفرانس بین‌المللی غیاث الدین جمشید کاشانی می‌باشد که در آبان ماه ۱۳۷۹ در دانشگاه کاشان برگزار گردید.

2. Golombek, Lisa and Wilber, Donald, 1988, *The Timurid Architecture of Iran and Turan.* 2 Vols. Princeton NJ.

مستدیر در ساختمان‌های عصر تیموری وجود ندارد، ولی شکل اصلی قوس‌های نوک تیز است که برش عمودی معمول‌ترین آنها تقریباً شبیه بیضی است.

کاشانی قوس (شکل ۱) را به صورت زیر تشریح می‌کند:

«شما باید بدانید که این قوس که آن را قوس حقیقی می‌نامیم پوششی است که روی دو تکیه‌گاه که بین دو خط موازی واقع شده‌اند، قرار گرفته است. قوس‌ها از پنج بخش تشکیل یافته‌اند. دوتای آنها بخش‌هایی از یک استوانه، یک حلقه یا شکلی طبل مانند هستند که قطر سوراخ آن کوچکتر یا مساوی دهانه، یعنی فاصلهٔ بین دو تکیه گاه قوس، می‌باشد. آنها روی تکیه‌گاه‌هایی در راست و چپ قرار گرفته‌اند. دو بخش دیگر قسمت‌هایی از یک استوانه، یا حلقه یا شکلی طبل مانند است که قطر سوراخ آن بزرگ‌تر از قطر سوراخ استوانه اولی بوده و ارتفاع آن برابر ارتفاع دو بخش اوّل می‌باشد. اینها روی رأس دو بخش اولی ساخته شده و بوسیلهٔ خطی که انحنای قوس است متصل شده‌اند. محورهای دو بخش سمت راست در یک صفحه و مشابهاً محورهای دو بخش سمت چپ در صفحهٔ دیگری قرار دارند. بخش کناری بوسیلهٔ دو بیضی گون مساوی و موازی و چهار صفحه مستقیم محدود شده است.

تمام بخش‌ها مانند پیکره‌ای است که بوسیلهٔ دو صفحه مستقیم و موازی که سردرهای آن هستند و دو سطح خمیده که یکی از آنها محدب (طاق) بوده و دیگری مقعر (توخالی) می‌باشد، محصور شده است. فاصلهٔ بین سردرها ضخامت قوس نامیده می‌شود. تفاوت بین یک قوس و یک طاق در این است که ضخامت یک قوس از دهانه آن کوچکتر ولی در طاق بزرگ‌تر است. چیزی که در قوس ضخامت نامیده می‌شود برای طاق طول نامیده می‌شود.

پنج روش برای رسم سر در یک قوس وجود دارد[۳]. در اولین سه روش، قوس شامل پنج عنصر می‌باشد که عبارتند از دو بخشی که هر کدام از دو قطعهٔ استوانه‌ای تشکیل یافته‌اند به همراه سنگ بالای طاق که سنگ‌های دیگر را به هم وصل می‌کند (شکل ۱ را ملاحظه کنید). در روش چهارم قوس از تنها دو قطعهٔ استوانه‌ای همراه سنگ بالای طاق تشکیل یافته و در روش پنجم تنها شامل دو بخش استوانه‌ای است.

اولین نوع سر در برای زمانی مناسب است که دهانه کمتر از پنج ذراع[۴] باشد. وقتی دهانه پنج، ده یاحداکثر پانزده ذراع باشد، سر در نوع دوم مرسوم‌تر است و سردر نوع سوم برای

۳. این پنج روش در فیلمی ویدئویی از نویسنده با نام «قبه‌ای برای کاشانی» به تصویر کشیده شده‌اند.

۴. یک ذراع طولی معادل یک بازو است. انواع معمول ذراع حدود ۵۴/۰ سانتی‌متر می‌باشند ولی ذراع بزرگ هاشمی ۶۶/۵ سانتی‌متر و ذراع کوچک هاشمی ۶۰/۱ سانتی‌متر است.

قوس‌هایی که دهانهٔ آنها بزرگ‌تر از ده ذراع باشد بسیار مناسب‌تر است.

هیچ مطلبی که نشان دهد، چه زمان سر در نوع چهارم و پنجم مناسب‌تر است، وجود ندارد. همهٔ سردرها، یک قبه ایجاد می‌کند که از برگشت سر در حول محور آن پدید می‌آید. کاشانی با استفاده از گنبد که بوسیلهٔ سر در نوع چهارم پدید می‌آید برای اثبات محاسبهٔ مساحت سطح و حجم قبه استفاده می‌کند. تمام پنج روشی که توسط کاشانی معرفی شدند، فقط از خطکش و پرگار استفاده می‌کنند. در بخش بعد من مثالی را شرح خواهم داد (روش دوم) که رسم سر در یک قوس را نشان می‌دهد.

سردر دوم

یک نیم‌دایره روی قطر AD، دهانه قوس، بکشید.

AD را از هر دو طرف به اندازهٔ ضخامت قوس ادامه دهید تا نقاط I و M بدست آید.

E را مرکز نیم‌دایره بگیرید.

کمان نیم‌دایره را به چهار قسمت مساوی بین نقاط G, C, B, A و D تقسیم کنید.

BE و GE را به وسیله EZ و HE مسای با AC و به وسیلهٔ خطوط BK و GL، مساوی با DM که همان پهنای قوس است امتداد دهید.

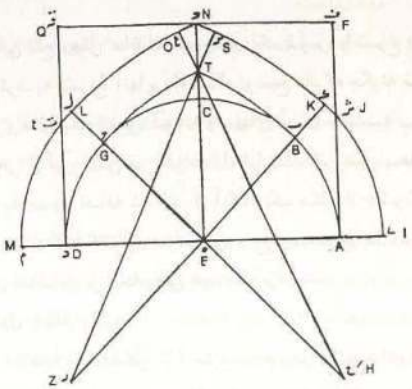
روی مرکز E کمان‌های ML و KL، روی مرکز H کمان GT و روی مرکز Z کمان BT را رسم کنید.

HT و ZT را وصل کرده و آنها را به اندازهٔ پهنای قوس امتداد داده تا نقاط O و S بدست آیند.

کمان LO را به مرکز H و کمان KS را به مرکز Z رسم کنید.

عمودهای SN و ON را روی خطوط TS و TO رسم کنید.

مقاطع TL, TN, KT, AK و LD با هم سر در قوس را که TN طاق آن است تشکیل می‌دهند.



شکل ۱: ساخت سر در نوع دوم در یکی از نوشته‌های کاشانی که از قدیمی‌ترین نسخهٔ موجود با اضافه کردن حروف رومی برداشته شده است.

کاشانی مشاهدات زیر را به ساختار سردر اول اضافه کرد. آنها برای سر در دوم نیز مناسب هستند: «ما همانطور که بعداً توضیح خواهیم داد SN و ON را مستقیم می‌سازیم نه خمیده»[۵]

ما می‌توانیم کمان‌های KS, TG, BT و OL را حول دو نقطه دیگر خطوط EZ و EH که داخل یا خارج نیم دایره زیرین قرار دارند، رسم کنیم. اما بهتر است مانند قبل انجام شود، زیرا در غیر این صورت محاسبات پیچیده‌تر خواهد شد.

ABTGD تقعر قوس نامیده می‌شود، چیزی که بنّاها آن را ورودی می‌نامند. در دو طرف نقطه N عمودهای NF و NQ را بر خط NTE مساوی با AE رسم کرده و AF و DQ را وصل می‌کنیم تا انحنای قوس را در J و t قطع کنند. سطوح JFN و NQt کناره‌های قوس و سطوح AJI و Dtm قسمت‌هایی از قوس هستند که داخل دیوار واقع شده‌اند. خط TE ارتفاع پائینی خم و خط EN ارتفاع بالایی آن است.

ما با چشمان خود دیدیم که در بعضی از ساختمان‌ها BT و TG و همین‌طور KN و NL خطوط مستقیم بودند.

---

۵. این کار محاسبه را امکان‌پذیر می‌سازد.

محاسبهٔ قوس

بعد از اینکه کاشانی پنج روش ساخت سردرهای یک قوس را شرح داده و مشخصه‌های قوس و طاق را کامل کرد، به تشریح آنها پرداخت. او توضیح داد که چگونه ضریب‌های مربوط به تعدادی از اندازه‌گیری‌های یک قوس، دهانه و پهنای آن را محاسبه نموده است. وی این ضریب‌ها را با توضیحی از این روش در یک جدول قرار داد. این ضریب‌ها همچنین به اعداد هندی تبدیل شده و به جدول اضافه شده‌اند. او آنگاه یک مثال از چگونگی محاسبه با این ضریب‌ها ارائه نمود. بنا به گفتهٔ کاشانی، سردر دوم رایج‌ترین سردر در زمان او بوده است و از این‌رو وی آن را برای اثبات روش محاسباتی خود بکار برد.

مثال: چگونه جدول را بکار بریم:

کاشانی فرض کرد دهانهٔ AD (شکل ۱) از سردر دوم برابر ۲۰ و پهنای DM از قوس مساوی ۵ باشد. من خم بیرونی U_1 را خط تحدب و خم درونی U_2 را خط تقعر و b را پهنای قوس روی قاعده‌اش می‌نامم. کاشانی محاسبات را انجام نداده و فقط نتایج گرد شدهٔ آن را ذکر نموده است. اکنون من تقریبات داده شده توسط کاشانی را فهرست می‌کنم:

ستون ۱: با این ضریب کاشانی خم درونی U_2 را محاسبه کرده است.

$$ABTGD = ۱,۶۵۱ \times AD = ۱۶۵۱ \times ۲۰ = ۳۳,۰۲ = ۳۳$$

ستون ۲: از حاصل ضرب این ضریب در پهنا، کاشانی نصف اختلاف بین خم‌های بیرونی و درونی را به دست آورد و با جمع این مقدار به خم درونی که در ستون ۱ پیدا شد، نصف مجموع خم‌های بیرونی و درونی را به دست آورد. نهایتاً وی با ضرب این مقدار در پهنای قوس مساحت سطح A از سر در را محاسبه نمود.

$$۱,۵۹۹ \times b = \frac{u_۱ - u_۲}{۲};\ [\frac{u_۱ - u_۲}{۲} + u_۲] \times b = \frac{u_۱ - u_۲}{۲} \times b = A$$

در مثال عملی ما. $u_۲ = ABTGD$; $\frac{u_۱ - u_۲}{۲} = IJNtM$;

$$\frac{u_۱ - u_۲}{۲} = ۱/۵۹۹ \times ۸;\ \frac{u_۱ - u_۲}{۲} + u_۲ = ۸ + ۳۳ = ۴۱;\ A = ۴۱ \times ۵$$

ستون ۳: ارتفاع درونی قوس:

$$ET = AD \times ۰,۵۹۸ = ۲۰ \times ۰,۵۹۸ = ۱۱,۹۶ = ۱۲$$

ستون ۴: پهنای بالایی قوس:

$$TN = AI \times ۱,۰۹۹ = ۵ \times ۱,۰۹۹ = ۵,۴۹۵ = ۵/۵$$

ستون ۵: برای یافتن مساحت سطح ورودی ABTGDE، کاشانی مربع دهانه را در ۵ ضرب و بر ۱۲ تقسیم نمود. این محاسبه با حاصل ضرب مقدار پیدا شده در جدول، یعنی ۴۱۹,۰

یا $\frac{۵}{۱۲} = ۱۳,۹۰۹۲۵$ معادل است.

ما اکنون می‌توانیم با استفاده از این مقادیر قسمت‌های مختلفی از قوس را به صورت زیر محاسبه کنیم:

برای محاسبه حجم قوس، به روش معمول عمل می‌کنیم. بعد از این که مساحت سطح قوس به وسیلهٔ ستون دوم جدول پیدا شد، آن را در ارتفاع قوس ضرب کرده و حجم آن را بدست می‌آوریم.

گاهی از اوقات، قسمت‌هایی از قوس در دیوار پنهان می‌شود و می‌خواهیم بدانیم که چه مقدار از آن قابل رؤیت بوده و چه مساحتی از آن درون دیوار قرار گرفته است. یعنی می‌خواهیم بخش‌های DtM و AJI را محاسبه کنیم. این قطعات از اختلاف قطاع مستدیر MtE و مثلث tDE محاسبه می‌شوند که خود اینها نیز بوسیله MD و ED قابل محاسبه‌اند.

$$\frac{ED}{EM} = \frac{ED}{ET} = \cos \angle tEM \quad , \quad EM = MD + ED$$

$$tM = \arccos \angle tEM \Rightarrow \text{arctM} \quad , \quad \text{arctM} \times ME = ۲MtE$$

$$\sin \angle tEM = \frac{tD}{tE} \Rightarrow \sin \angle tEM \times tE \times DE = ۲\Delta tDE$$

$$۲MtE - ۲\Delta DE = ۲tDM$$

اگر این مقدار را از مساحت کامل سطح قوس تفریق کنیم آنگاه مساحت سطح بخش قابل رؤیت قوس بدست می‌آید.

وذلك المقادير بالرقوم الهندية

بالوجه الاول	۴ ۲۶ ۱	۴ ۹۲ ۱	۰ ۶۹ ۰	۱ ۳۳ ۱	۴ ۰۸ ۰	
بالوجه الثاني	۱ ۶۱ ۱	۱ ۵۹ ۱	۱ ۵۹ ۰	۱ ۹۹ ۰	۱ ۹۰ ۴	
بالوجه الثالث	۱ ۱۲ ۱	۱ ۰۶ ۱	۰ ۳۸ ۰	۱ ۱۱ ۰	۱ ۰۱ ۴	
بالوجه الرابع	۱ ۰۶ ۱	۱ ۷۶ ۰	۰ ۳۹ ۰	۱ ۹۶ ۰	۱ ۷۸ ۴	

جدول محاسبات قوس‌ها و بخش‌های آن (برداشته شده از قدیمی‌ترین نسخهٔ موجود مفتاح الحساب)

در ادامهٔ محاسبات، ما به کناره‌های مقطع NQt و JFN نیاز داریم. برای این منظور مساحت AFQD را محاسبه کرده و مساحت بخش قابل رؤیت قوس را که در بالا محاسبه شد از این مقدار کم می‌کنیم. بدین ترتیب مساحت ورودی قوس که همان ABTGDE می‌باشد در ستون پنجم محاسبه شده است. این تفاضل مساحت سطح کناره‌ها را بدست می‌دهد. اگر ما این مقدار را در ارتفاع کناره‌ها ضرب کنیم، حجم دو کناره حاصل می‌شود لذا در نقشه‌برداری ساختمان‌ها، بهتر است ابتدا دیوار را اندازه بگیریم.

اگر بخواهیم مساحت بیرون و درون قوس یعنی سطوح طاق شکل را بدست آوریم، بایستی ارتفاع قوس را در خم درونی u_2 ضرب کنیم تا مساحت سطح درونی آن بدست آید. اگر ارتفاع را در خم بیرونی u_1 ضرب کنیم آنگاه مساحت سطوح خارج بدست می‌آید.

تعیین ضرایب

محاسبات جدول گزارش کاملی از چگونگی تعیین ضرایب بدست می‌دهد. مانند بخش قبل، من دوباره سردر نوع دوم را برای تشریح روش کاشانی بکار می‌برم (شکل ۱ را ببینید):

ستون ۱: فرض می‌کنیم دهانهٔ قوس یعنی AD برابر ۲ باشد،

این مقدار را در خارج قسمت محیط به قطر یعنی π ضرب می‌کنیم تا مقدار ۵۹،۲۸، ۱۶؛ ۶ بدست آید.

یک هشتم مقدار محاسبه شده را که برابر ۲۶، ۷، ۴۷؛ ۰ است، در نظر می‌گیریم. این خط تقعر دو بخش اول، یعنی یکی از دو کمالن AB و DG می‌باشد.

زاویه HET ۱۳۵° و سینوس آن برابر ۴، ۳۵، ۴۲؛ ۰ است.

این مقدار را در خط HE یعنی ۱۰، ۵۱، ۲۴؛ ۱ ضرب و حاصل را بر خط HT که نصف قطر بخش دوم است تقسیم می‌کنیم تا مقدار ۱۰، ۵۱، ۲۴؛ ۲ بدست آید.

خارج قسمت، سینوس زاویه HTE است که برابر ۱۱، ۲۸، ۲۴؛ ۰ می‌باشد. بدین ترتیب زاویهٔ HTE یا زاویهٔ قسمت بیضی گون به صورت ۱۱، ۲۸، ۲۴؛ ۰ بدست می‌آید.

این مقدار را از مکمل زاویه اول کسر کرده و بدین ترتیب زاویه THG مساوی ۴۹، ۳۱، ۲۰ بدست می‌آید.

در یک دایره با نصف قطر ۱۰، ۵۱، ۲۴؛ ۲، کمان GT برابر ۵۳؛ ۵۴، ۵۱؛ ۰ خواهد بود. سپس کمان GT را با کمان GD جمع کرده تا کمان TGD مساوی با ۲،۱۹، ۳۹؛ ۱ بدست آید.

این روش برای نصف دهانه درست است. این مقدار را در اولین ستون وارد می‌کنیم. اگر این مقدار را در نصف دهانه ضرب کنیم، نصف خط تقعر یا خم درونی u_2 بدست می‌آید و اگر این مقدار را در کل دهانه ضرب کنیم، کل خط تقعر بدست می‌آید.

توضیح (شکل ۱)

فرض کنید: $r = ۱$ و $ArcGD = \frac{۱}{۸} \times (۲\pi)$. قضیه سینوس رابطه $\frac{\sin\angle HTE}{HE} = \frac{\sin\angle HET}{HT}$ را بدست می‌دهد. چون $\sin\angle HET$ معلوم بوده، EH مساوی $\sqrt{۲}$ و HT مساوی $\sqrt{۲} + ۱$ است. $\sin\angle HTE$ بدست می‌آید. بنابراین $\angle HTE$ و از آنجا $\angle THE$ محاسبه می‌شود. در دایره‌ای با $r = HT(۱+\sqrt{۲})$، کمان GT معلوم است. لذا مجموع کمان‌های GD و GT یعنی کمان DT به دست می‌آید.

ستون ۲: فرض کنیم پهنای قوس یعنی MD، برابر یک باشد.

اگر این مقدار را در $[۲\pi]$ ۲۸، ۵۹، ۱۶؛ ۶ ضرب کرده و یک هشتم آن را بدست آوریم به عدد ۲۶، ۷، ۴۷؛ ۰ که تفاضل کمان ML از کمان DG است، می‌رسیم.

چون زاویه بخش دوم ۴۹، ۳۱؛ ۲۰ است، از این رو کمان OL منهای کمان TG برابر ۵۷، ۲۹، ۲۱؛ ۰ خواهد بود. زاویه NTO از قسمت بیضی گون برابر ۲۴؛۲۸،۱۱ است. بنابراین ضلع آن یعنی ON، برابر ۱۹، ۱۸، ۲۷؛ ۰ می‌باشد با جمع این سه عدد مقدار ۴۲، ۵۵، ۳۵؛ ۱ به دست می‌آید.

[۴۲، ۵۵، ۳۵؛ ۱ = ۵۷، ۲۹، ۲۱؛ ۰ + ۰ : ۲۶، ۷، ۴۷]

اگر پهنای قوس را در این مقدار ضرب کنیم آنگاه اختلاف بین نصف خط طاق یعنی خم بیرونی u_1 به دست می‌آید که همان $\frac{u_1 - u_2}{۲}$ است. حال اگر این مقدار را دو برابر کرده، اختلاف بین تمام خط طاق و تمام خط تقعر به دست می‌آید. این عدد را در ستون دوم می‌نویسیم.

توضیح (شکل ۱):

وقتی پهنای قوس را برابر یک فرض می‌کنیم، اختلاف بین کمان ML و کمان GD با همان زاویه GED برابر $\angle GED \times \frac{\{(r+۱) - r\}}{۳۶۰^\circ}$ خواهد بود. به همین روش اختلاف بین کمان OL و کمان GT محاسبه می‌شود. ON تانژانت زاویه NTO است که در بالا محاسبه کردیم.

ستون ۳: مقدار خط HT را که ۱۰، ۵۱، ۲۴؛ ۲ است در سینوس زاویه EHT ضرب کرده و

حاصل را بر سینوس زاویه HEN تقسیم می‌کنیم تا عدد ۴۲،۲۵،۳۵،۴؛ ۶۰ بدست آید. خارج قسمت، خط ET است که برابر ۳۲، ۵۰، ۱۱؛ ۱ می‌باشد. ما نصف این مقدار یعنی ۱۶، ۵۵، ۳۵؛ ۰ را وقتی دهانه برابر ۲ فرض شده است در نظر می‌گیریم. حال پهنای قوس را در این مقدار ضرب می‌کنیم تا ارتفاع پائینی خم به دست آید. این عدد را در ستون سوم قرار می‌دهیم.

توضیح (شکل ۱):

قضیه سینوس رابطه $\sin\angle EHT : ET = \sin\angle HEN : HT$ را به دست می‌دهد.

ستون ۴: یک را بر کسینوس زاویه بخش بادامی شکل یعنی ۳۹، ۳۶، ۵۴؛ ۰ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت پهنای خم یعنی ۱۲، ۵۵، ۵؛ ۱[۷] می‌باشد این مقدار در ستون چهارم یادداشت می‌شود. اگر دهانهٔ قوس را در این عدد ضرب کنیم، پهنای خم یعنی خط NT به دست می‌آید.

توضیح (شکل ۱):

پهنای کمان یعنی خط OT برابر یک است. به عبارت دیگر $Cos\angle NTO = \frac{NT}{TO}$.

اکنون نصف قطر بخش اول خم را در کمان GD ضرب می‌کنیم تا دو برابر مساحت قطاع GED یعنی ۲۶، ۷، ۴۷؛ ۰ به دست آید. اگر نصف قطر بخش دوم را در کمان TG، که مساوی ۵۳، ۵۴، ۵۱؛ ۰ است، ضرب کنیم دو برابر مساحت قطاع THG یعنی ۵۹، ۱۹، ۵؛ ۲ بدست می‌آید.

اگر عمود رأس H از مثلث HET یعنی ۰، ۰، ۰؛ ۱ را در قاعدهٔ مثلث یعنی ۳۲، ۵۰، ۱۱؛ ۱ ضرب کنیم دو برابر مساحت مثلث یعنی ۳۲، ۵۰، ۱۱؛ ۱ بدست می‌آید. حال این مقدار را از دو برابر مساحت قطاع THG کم می‌کنیم. باقیمانده دو برابر مساحت TEG خواهد بود.

[۲۷، ۲۹، ۵۳؛ ۰ = ۳۲، ۵۰، ۱۱؛ ۱ - ۵۹، ۱۹، ۵؛ ۲]

اکنون نتیجه را با دو برابر قطاع GED جمع می‌کنیم تا مساحت سطح ورودی بدست آید. به عبارت دیگر

[۵۳، ۳۶، ۴۰؛ ۱ = ۲۶، ۷، ۴۷؛ ۰ + ۲۷، ۲۹، ۵۳؛ ۰]

مربع دهانه را برابر یک در نظر گرفته و با تقسیم بر $۲^۲$ مقدار ۱۳، ۹، ۲۵؛ ۰ را بدست می‌آوریم. این عدد را در ستون پنجم می‌نویسیم. نهایتاً اگر مربع دهانه قوس را در این عدد ضرب کنیم، مساحت سطح ورودی بدست می‌آید.

---

۶. در جدول ۲۵، ۳۵، ۴۳؛ ۰ به دست آمده است.

۷. در جدول ۱۲، ۵۵، ۵؛ ۱ به دست آمده است.

توضیح (شکل ۱):

حاصل جمع دو برابر قطاع GED و دو برابر قطاع THG منهای دو برابر مساحت مثلث HET مساوی دو برابر قطاع DGTE که ورودی قوس است خواهد بود.

دقت

در بخش قبل، سعی کردم که نشان دهم چگونه کاشانی با دقت ضرایب سردر نوع دوم را محاسبه کرده است. وی با همین دقت محاسبات چهار نوع سردر دیگر را به پایان رساند. در بخش محاسبات دیدیم که کاشانی با مقادیر گرد شده کار می‌کرد. زیرا در واقع کتاب او برای استفاده عملی است. ولی قوس‌ها تنوع بیشتری نسبت به پنج نوع معرفی شده توسط کاشانی دارند (شکل ۲ را ببینید). اگر قوس‌هایی غیر از پنج مدل ارائه شده توسط کاشانی مورد بررسی قرار گیرند مجدداً بایستی از تقریب استفاده نمود یا در واقع بایستی نزدیک‌ترین مدل به قوس را اختیار کرد. گولومبک و ویلبر[8] مثال‌هایی از قوس‌های تیموری را در ترتیبی که به وسیلهٔ کاشانی مطرح شده بود در نظر گرفتند. مثال‌ها برای تمام موارد مگر مدل پنجم که در پنجره‌های کوچک رایج‌تر است اجرا شدند. در مقایسهٔ مثال‌های شرح داده شده توسط کاشانی و مثال‌های واقعی از قوس‌های تیموری در می‌یابیم که هدف کاشانی محاسبهٔ سطح و حجم بوده است و نه ساختن آنها. این بدین معنی است که یک محاسبه ساده ما را به یک تقریب ظریف که هدف نهایی است رهنمون می‌سازد.

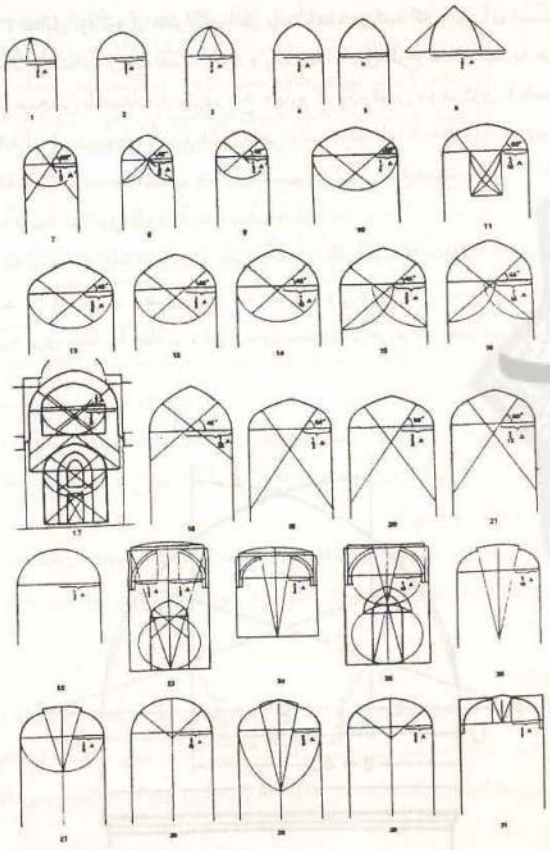
کاشانی به مقاطع بیضی شکل برای قوس‌ها یا گنبدها اشاره‌ای نکرده است. تعدادی گنبد وجود دارند که برای آنها مقطع می‌تواند به عنوان فصل مشترک قوس‌های بیضوی متقارن تفسیر شود. یک بیضی دو قطر دارد، یکی قطر بزرگ و دیگری قطر کوچک. در قوس‌ها قطر بزرگ در امتداد خط دهانه در نظر گرفته می‌شوند اما با طول برابر نیستند. در بعضی حالات نصف قطر بزرگ کمی کوچکتر از دهانه است. قطر کوچک باید کمی بزرگتر از نوک قوس باشد. نسبت قطرهای کوچک و بزرگ شکل خم بیضی را تعیین می‌کند.

بولاتوو[9] قوس‌هایی از قرون دوازدهم تا پانزدهم را در آسیای مرکزی تحلیل کرد. او اظهار نمود که تعدادی از قوس‌های نوک تیز به عنوان فصل مشترک بیضی‌ها ساخته شده‌اند. او

8. [Golombek and wilber, 1988].

9. Bulatow, M.S. 1978. *Geometric Harmony in the Architecture of Asia, 9th - 15th century*. (Russian). Moscow.

دهانه‌هایی بزرگتر از ده متر را مورد توجه قرار داد، اینها به سادگی می‌توانند از قوس‌های چهار مرکزی ساخته شوند. معماران آن زمان با پایداری بیضی آشنا بودند، زیرا ساختار آن از عهد ساسانیان معروف بود.

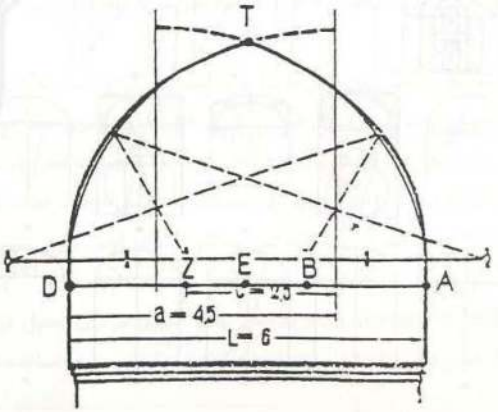


شکل ۲: قوس‌های پیدا شده در معبدی در ترکستان (گولومبک و ویلبر)

بنابراین تحلیل این نوع قوس در تعدادی از مهمترین ساختمان‌های تیموری آن دوره چون گور امیر در سمرقند، مقبره تیمور لنگ و الغ بیک، در مقبره‌های درونی، در قوس گذرگاه‌ها و دروازه‌های ورودی، پیدا شده‌اند. قوس‌های یکسانی به صورت قوس‌های سه و چهار مرکزی در جاهای دیگر شناسایی شده‌اند که می‌توانند برای مقاصد عملی در نظر گرفته شوند.

در شکل ۳ تحلیل بولاتوو از مقبرهٔ گور امیر را مشاهده می‌کنید که مبین آن است که مقبرهٔ گور امیر احتمالاً با استفاده از یک جفت کانون و یک خط واصل طرح شده است. به هر حال این مقبره می‌تواند همچنین با استفاده از سردر نوع چهارم که یک قوس دو مرکزی با فاصله‌ای برابر یک سوم دهانهٔ آن است، بوجود آمده باشد. ما می‌توانیم با استفاده از خط AD به عنون دهانه و نقاط B و Z که دهانه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، قطاع مستدیری را که کاملاً داخل خم رسم شده توسط بولاتوو قرار دارد به دست آوریم.

جالب توجه است که اختلاف بین دو خم در محدوده‌ای است که خطای آن مورد قبول حتی معماران جدید نیز قرار دارد. بیضی برای رسم ساده‌تر ولی قطاع‌های مستدیر برای محاسبه ساده‌ترند. البته برای محاسبهٔ مقادیر و قوس‌های بیضوی نیز می‌توانیم ضرایب کاشانی را بکار بریم.



شکل ۳: مقبرهٔ گور امیر (تحلیل بولاتوو به همراه اضافات)

خم زنجیری یا طاق توپی یک طاق خشتی ساده است که بدون استفاده از فورم‌های چوبی ساخته شده است. در مصر علیا، طی هزاران سال، این نوع از طاق‌بندی برای ساختن خانه‌های معمولی، معابر و حتی درهای ارگ‌های سلطنتی به کار رفته است. این طاق هنوز تا سال ۱۹۷۰ در نوبیا به کار می‌رفت و تکنیک آن بسیار ساده است.[10]

دیوارهای عقب و جلویی اطاق را به صورت طاقدار چنان بسازید که ۶۰٪ بالاتر از دیوارهای جانبی باشد. از درون ضلع بالایی هر دیوار زنجیری راکه طول آن ۶۷ و ۱ برابر پهنای طاق است، آویزان می‌کنیم. این کمان زنجیری را، به موجب تعریف، یک خم زنجیری می‌نامیم. این خم را روی یک الگوی چوبی یا مقوایی رسم کرده و آن را در طول آن خط ببرید. الگو را وارون کرده و آن را در مقابل دیوار جلویی یا عقبی چنان قرار دهید که نقاط قاعدهٔ الگو در درون گوشه‌های بالایی دیوارها قرار گیرند. از گل برای رسم شکل الگو روی دیوار استفاده کنید. شکل حاصل یک طاق خواهد بود. آیا این حکم برای دیوار مقابل نیز درست باقی می‌ماند؟ بین دو ترسیم نخ‌های هموار نصب کنید و...

اینجا حالت جالبی رخ می‌دهد که خم طاقی شکل زنجیری یک خم ساده نیست. با وجود این مطلب، محاسبهٔ طاق ساده بوده و به جدول نیازی ندارد. در واقع، عرض اطاق معلوم بوده و اندازهٔ طاق ۶۷ و ۱ برابر اندازهٔ اطاق خواهد بود. چون اندازهٔ آجرهای خشتی معلوم است، پهنای طاق، خم بیرونی و خصوصاً ارتفاع اطاق قابل محاسبه است. بنابراین ما می‌توانیم درون و بیرون سطوح طاق‌دار و همچنین سطح سردر را محاسبه کنیم. نهایتاً اگر سطح سردر را در ارتفاع طاق ضرب کنیم، حجم طاق بدست می‌آید.

این نوع از طاق‌ها همچنین در بناهای جدید اسلامی، مثل مسجد تاریخانه در شهر دامغان، به کار رفته است. طاق‌های این مسجد تخم مرغی بوده و خیلی کم، نوک تیز است.[11]

نتیجه گیری

کاشانی بحث محاسبات قوس‌ها از کتاب مفتاح الحساب خود را با جملهٔ زیر به پایان می‌رساند: «من دربارهٔ موضع این بخش، که بسیار مهم است، خیلی صحبت کرده‌ام. پیشینیان در این خصوص مطالعه‌ای نداشته‌اند، در حالی که می‌بایستی این کار را انجام می‌دادند.» کاشانی

10. Swan, Simone, 1999: "Elegant Solutions), *Aramo World* 50,4, pp. 16 - 27.

11. Rashed, Mahmoud, 1998: *Iran. Geschichte, Kultur und lebendige Traditionen - antike Stiitten und islamische Kunst in Persien.* Koln.

جداول ساده‌ای را برای محاسبات مهندسان آن زمان آماده نمود. ارزش این جداول زمانی آشکار می‌شود که توجه کنیم معماران آن دوره، برای امور ساختمانی غالباً برآوردهای پر خطا و لذا پرهزینه‌ای را انجام می‌داده‌اند. چون محاسبات مربوط به قوس‌ها دقتی تا سه رقم اعشار صحیح دارد، جداول کاشانی به تمام مقاصد عملی در آن عصر پاسخ می‌دهد.

در قرن هفدهم، معماران عصر صفویه، درصدی بر اساس مقیاس ذراع به ارتفاع و ضخامت دیوارها می‌افزودند:[۱۲]

> ایرانیان قیمت ساختمان را بر اساس ارتفاع و ضخامت دیوار تعیین می‌کردند که آن را نیز مثل پارچه با ذراع اندازه می‌گرفتند. شاه هیچ مالیاتی بر خرید و فروش خانه وضع نکرده بود ولی استاد معمار که رئیس بناها بود، دو درصد سهم معامله را نصیب خود می‌ساخت. این مقدار در صورت ساخت عماراتی که توسط شاه سفارش داده می‌شد، تا پنج درصد افزایش می‌یافت. در چنین مواردی، ارزش عمارت بعد از تکمیل ساختمان تخمین زده می‌شد و استاد معمار که هدایت ساخت را به عهده داشت حقوق خود را به اندازهٔ پنج درصد ارزش هر عمارت، دریافت می‌کرد.

پرداخت حقوق بر اساس مساحت کار در واحد ذراع، همچنین در معماری عصر عثمانی‌ها رواج داشت. در آن زمان یک تیم از معماران و مساحان ارزش بنای ساخته شده را ارزیابی کرده و ترسیم‌های مقدماتی را برای سایر محاسبات آماده می‌ساختند. به علاوه در ایتالیای قرون وسطی نیز پرداخت حقوق به صنعتگران بر اساس سطحی که کامل می‌کردند، انجام می‌گرفت. آنها بایستی می‌دانستند که کم و بیش چه مقدار طلا برای زراندود کردن یا چه تعداد آجر برای ساختمان مورد نیاز است. فرمول‌های هوشمندانهٔ کاشانی مانند فرمول‌های ساده‌ای که در کتب راهنمای حساب پیدا شده بود، در زندگی روزمره به کار می‌رفت. این هدف کاشانی بود، همان‌گونه که وی در کتاب مفتاح الحساب خود بیان می‌کند: «من در تحریر این کتاب هر چیزی را که برای محاسبات دقیق در زندگی روزمره مورد نیاز است، شرح داده‌ام.» او اضافه می‌کند که «از محاسبات طولانی و اختصار رنجش‌آور احتراز کنید.» من امیدوارم که در این مقاله در این راستا حرکت کرده باشم.

سپاسگزاری: مترجمین سپاس خود را از آقای دکتر جعفر آقایانی چاوشی به خاطر تصحیحات و تذکرات ارزشمندشان در خصوص ترجمه این مقاله، ابراز می‌دارند.

12. Necipoghu, Giilru, 1995: *The Topkapi Scroll - Geometry and Orna - ment in Islamic Architecture.* Santa Monica, CA.

کتاب‌شناسی:

Bulatow, M.S.,1978: *Geometric in the Architecture of Central Asia, 9th - 15th century.* (Russian). Moscow.

Dold - Samplonius, Yvonne, in Press: "Calculating Surface Areas and Volumes in Islamic Architecture" *Perspectives on Science in Medieval.* Eds. P. Hogendijk and A.I.Sabra. Conference at Dibner Institue 1998, Boston, MJ. T.Press.

Golombek, Lisa and Wilber, Donald, 1988: *The Timurid Architecture of Iran and Turan.* 2 Vols. Princeton NJ.

Al - Kashi, Ghiyath al-Din, 1427: *Miftah al-Hisab* (Key of Arith - metic).

Ms. Malek Library 3180/1, Tehran, dated 830 AH(!), copied by mo'In al-Ilin al-Kashi, who went with al-Kashi *from Kashan to Samarqand.*

Ms.Or.185, Leiden, dated AD 1558.

Nader, Nablusi, 1977: *Al-kashi, Ghiyath al-Din: Miftah al-Hisab* (Key of Arithmetic). Arabic edition, with French notes and introduction. Damascus.

Necipoglu, Giilru, 1995: *The Topkapi Scroll - Geometry and Ornament in Islamic Architecture.* Santa Monica, CA.

Rashed, Mahmoud, 1998: *Iran. Geschichte, Kultur und lebendige Traditionen - antike Stätten und islamische Kunst in Persien.* Koln.

Rosenfeld, Boris A. and Youschkevitch, Adolf P., 1954: *Al-Kashi, Ghiyath al-Din: Miftah al-Hisab* (Key of Arithmetic). Russian Translation and Commentary Matematitcheskije Traktaty, *IstorikMatematitcheskije Issledovaniya* 7, pp. 13-32.

Swan, Simone, 1999: "Elegant Solutions", *Aramco World* 50,a, pp. 16-7

Video: "Qubba for al-Kashr' (16 min.), Yvonne Dold-Samplonius, Technics: Christoph Kindel & Kurt Saetzler, IWR, Heidelberg 1995/6. Distributed by AMS 1997.