یک روش درون‌یابی برای محاسبهٔ مطالع مایل در دورهٔ اسلامی[*]

جواد همدانی‌زاده[۱]
ترجمهٔ آریان مولائیان[۲]

۱. مقدمه

در نجوم یونان باستان و دورهٔ اسلامی دو دسته روش متمایز مشاهده می‌شود. در یکی که معمولاً برگرفته از الگوهای هندسی است، توابعی از متغیرهای پیوسته به کار می‌رود. دستهٔ دیگر، دنبالهٔ اعداد گسسته را به کار می‌گیرد و آن‌ها را فقط به کمک چهار عمل اصلی، ولی گاهی با مهارت و پیچیدگی قابل توجه دستکاری می‌کنند.

گاهی این دو نوع روش در کنار هم در نوشته‌ای ظاهر می‌شود. بحث حاضر دربارهٔ مطالع مایل در زیج اشرفی است که در اوایل قرن هشتم هجری در شیراز نوشته شده است. مؤلف آن محمد بن ابی عبدالله سنجر کمالی معروف به سیف منجم بود و اثرش در نسخه‌ای یکتا به شمارهٔ ۱۴۸۸ در کتابخانهٔ ملی پاریس نگهداری می‌شود.[۳]

مؤلف زیج این مبحث را با تشریح دستورهای محاسبهٔ جداول مطالع مایل برپایهٔ مثلثات کروی آغاز می‌کند. سپس روش دیگری برای همان مسئله می‌آورد که مثالی از دستهٔ دوم روش‌ها، یعنی «روش‌های حسابی»، است. که در ادامه آن را بیان می‌کنیم. او می‌نویسد که این روش را از کتابی به نام سر الاسرار که گویا آن هم در شیراز نوشته شده به دست آورده است. بروکلمان در پیوست سوم فهرست خود با عنوان تاریخ ادبیات عربی[۴] (ص ۱۰۸۵) این نام را برای چندین اثر با محتوای

---

[*] این مقاله ترجمه‌ای است از:
A medieval interpretation scheme for oblique ascension, *Centaurus*, vol. 9 (1963), pp. 257-265.

۱. استاد پیشین دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه صنعتی شریف jzadeh553@gmail.com

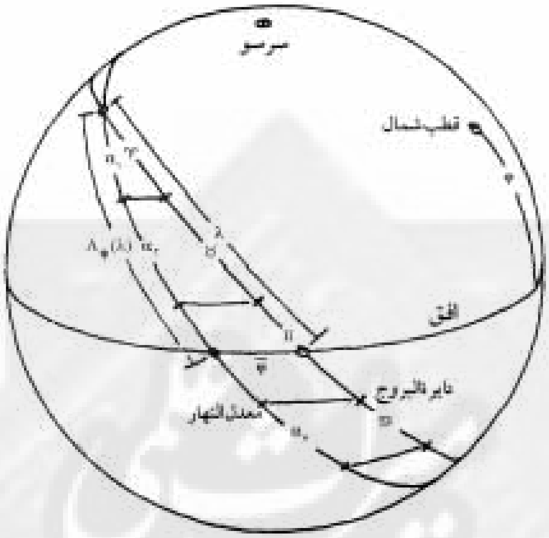
۲. دکتر ریاضیات، مشاور علمی شرکت هیدرو کبک (مونترآل، کانادا) molaeyana@yahoo.fr

۳. اخیراً نسخهٔ دیگری از زیج اشرفی به شمارهٔ ۳۹۴۷ در کتابخانهٔ آیت الله گلپایگانی (قم) شناسایی شده که در این مقاله از آن هم استفاده شده است.

4. *Geschichte der arabischen Litteratur*, Leiden, 1943.

فلسفی، کیمیایی یا عرفانی آورده است و نمی‌دانیم کدام یک از آن‌ها منبع مؤلف زیج اشرفی بوده است.

در بخش دوم این مقاله مفاهیم نجومی مرتبط با مطالع مایل تعریف می‌شود و در بخش بعد بندی از متن اصلی را می‌آوریم.[۱]



شکل ۱

۲. زمان‌های طلوع و مطالع مایل

شکل ۱ کرهٔ سماوی را با دو دایرهٔ عظیمهٔ اصلی‌اش، دایرةالبروج و استوای سماوی نشان می‌دهد. در مناطق معتدل و استوایی، تمام نقاط هر دوی این دوایر یک بار در روز از افق شرقی طلوع می‌کنند، و در هر لحظه زوجی از نقاط، یکی بر هر یک از دو دایره، همزمان طلوع می‌کنند. چون قطب استوای سماوی، قطب شمال سماوی، نقطه‌ای است که چرخش روزانه به دور آن صورت می گیرد، زمان را می‌توان با کمان‌هایی روی استوای سماوی اندازه گیری کرد. به ویژه، زمانهای مورد نیاز برای گذشتن هر کدام از دوازده برج از افق شرقی عبارتند از کمان‌های استوایی $\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, ..., \alpha_{۱۲}$ که در شکل نشان داده شده است. این زمان‌های طلوع برج‌ها نقشی اساسی در نجوم کهن ایفا می کنند.[۲] زمان طلوع هر درجه، یا هر کمان دیگری روی دایرة البروج را می‌توان به طرز مشابه تصور کرد.

۱. در اصل مقاله، ترجمهٔ انگلیسی این بند آمده است و در اینجا متن عیناً از دو نسخهٔ خطی موجود نقل شده است.
۲. بنگرید به کتاب علوم دقیق در عهد عتیق، اتونویگه باوئر، ترجمهٔ همایون صنعتی‌زاده، تهران ۱۳۷۵، ص ۲۱۱-۲۱۳.

مطالع مایل هر نقطه روی دایرةالبروج (با طول سماوی λ) با در نظر گرفتن لحظه‌ای که آن نقطه از افق شرقی می گذرد پیدا می‌شود. فاصلهٔ استوایی نقطهٔ دوم (برخوردگاه استوای سماوی و افق) تا نقطهٔ اعتدال بهاری، $A_{\varphi}(\lambda)$ در شکل، مطالع مایل λ است. چون ارتفاع قطب با φ،عرض جغرافیایی محل، برابرست واضح است که φ بر مطالع مایل اثر می‌گذارد و پارامتری از این تابع است. این توابع به طور گسترده‌ای در حل مسائل نجوم کروی به کار می‌رفتند، و زیج های دورهٔ اسلامی شامل مجموعه های مفصلی از جداول مطالع مایل هستند.

از تعاریف نتیجه می شود که مطالع مایل هر نقطه از دایرةالبروج مجموع زمان های طلوع همهٔ کمان های بین نقطهٔ مورد نظر و نقطهٔ اعتدال بهاری است.

۳. بند برگرفته از *زیج اشرفی*(نسخهٔ پاریس: گ ۱۰۱ر؛ نسخهٔ گلپایگانی گ ۹۲ر–۹۲پ) دربارهٔ مطالع مایل در زیر می‌آید. شمارهٔ سطرها مربوط به نسخهٔ پاریس است.

> (سطر ۱۱) مصنف سر الاسرار مطالع برج برج مفرد بحسب درجه درجهٔ عـروض از (۱۲) یک درجه تا تمام میل کلی که نهایت عمارت است نهاده و گفته که اگر خواهند که مطالع درجه درجه بحسب (۱۳) عرضی معین بدانند تفاوت میان مطالع برج اول و ثـانی معلـوم کنند و بنگرند اگر مطالع برج اول کمتر (۱۴) از مطالع برج ثانی باشد ثلث تفـاوت از وی نقصان کنند و اگر زیادت باشد بر وی افزایند. حاصل یـا بـاقی (۱۵) بـر لَ قسـمت کننـد خارج قسط یک درجهٔ سواء آن برج باشد غیر معدل. آن را در ده موضع وضع گردانند. بعد از آن (۱۶) بنگرند اگر مطالع برج اول کمتر باشد ثلث تفاوت مطالع هر دو برج منحط بـر یک یک موضع افزایند تا حاصل (۱۷) مطالع ده درجهٔ اول برج متقدم باشـد معـدل. پـس دیگر بار قسط یک درجه در ده موضع بنهند و ثلث تفاوت (۱۸) منحط مذکور را مضاعف کنند و بر یک یک موضع افزایند تا مطالع ده درجهٔ اوسط معدل حاصل گردد. پـس دیگـر (۱۹) بار قسط یک درجه را در ده موضع وضـع گرداننـد و تفـاوت مطـالع هـر دو بـرج را منحط بر یک یک موضع افزایند تا (۲۰) حاصل مطالع ده درجهٔ آخر باشد معـدل. و اگـر مطالع برج اول زیادت باشد ثلث تفاوت منحط از قسط (۲۱) نقصان کنند تا معدل شود.

در ادامه مثالی «به متابعت مصنف سر الاسرار» آمده است. سپس متن با عرضهٔ آزمون‌هایی برای یافتن خطاهای محاسبه، و کاربرد آنها در مثال توضیح داده شده، ادامه می‌یابد.

۴. شرح

سطر ۱۲ . در هر محل با عرض جغرافیایی $\varphi > 90^{\circ} - \varepsilon$ که بنابراین در نواحی شمالگان واقع است، نقاطی بر دایرةالبروج وجود دارند که هرگز طلوع نمی‌کنند. پس مفهوم مطالع برای چنین نقاطی منتفی است.

سطرهای ۱۳-۱۵. با نمادگزاری جدید محتوای متن، اگر $\Delta\alpha_{۱} = \alpha_{۲} - \alpha_{۱}$

کسر $\frac{\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۳}}{۳۰} = p$ را تشکیل می‌دهیم که "قسط یک درجه، غیر معدل" است. از اینجا به بعد نمادگذاری متعارف تفاضل را به کار می بریم:

$$\Delta a_n = a_{n+۱} - a_n$$

$$\Delta_{۲} a_n = \Delta a_{n+۱} - \Delta a_n$$

سطرهای ۱۶-۱۷. «منحط کردن» عددی بیان شده در نماد گذاری شصت گانی عبارت است از تقسیم کردن آن بر پایهٔ دستگاه یعنی شصت است. مثلاً با منحط کردن ۲۵;۰ ($\frac{۲۵}{۶۰}$ یا ۲۵ دقیقه) ۲۵,۰;۰ ($\frac{۲۵}{۳۶۰۰}$ یا ۲۵ ثانیه) به دست می‌آید.

طبق این دستور

$$A(k) = A(k-۱) + \Delta A = k(p+e), \quad k = ۱,۲,۳,...,۱۰, \qquad (۱)$$

که در آن $e = \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۳} \cdot \frac{۱}{۶۰}$.

چون $A(۰^{\circ}) = ۰^{\circ}$ دستور (۱) مطالع اولین ده درجهٔ منطقة البروج را بر حسب مطالع دو برج اول می‌دهد. این روش، درونیابی خطی است. برای $k = ۱۰^{\circ}$ حاصل می‌شود:

$$A(۱۰^{\circ}) = ۱۰\left(\frac{\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۳}}{۳۰} + \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۳} \cdot \frac{۱}{۶۰}\right) = \frac{۱}{۳}\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸} \qquad (۲)$$

سطرهای ۱۷-۱۸. اکنون دستور چنین است:

$$A(۱۰^{\circ} + k) = A(۱۰^{\circ}) + k(p+۲e), \quad k = ۱,۲,۳,...,۱۰$$

که حاصل درونیابی خطی برای ده درجهٔ دوم را می دهد. از اینجا داریم:

$$A(۲۰^{\circ}) = A(۱۰^{\circ}) + ۱۰(p+۲e) = \frac{۲}{۳}\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸} \qquad (۳)$$

سطرهای ۱۹-۲۰ .برای یک سوم آخر برج، از این روش به دست می‌آید:

$$A(۲۰^{\circ} + k) = A(۲۰^{\circ}) + k(p+۳e), \quad k = ۱,۲,۳,...,۱۰$$

که نتیجه می‌دهد:

$$A(۳۰^{\circ}) = A(۲۰^{\circ}) + ۱۰(p+۳e) = \frac{۲}{۳}\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸} + ۱۰\left(\frac{\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۳}}{۳۰} + \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۶۰}\right) = \alpha_{۱}$$

آخرین جملهٔ متن نقل شده، تطبیق روش برای حالتی است که در آن $\Delta\alpha_{۱} < ۰$. چون ما بر خلاف مؤلف سرالاسرار، اعداد منفی را در اختیار داریم، معادلات نوشته شده در بالا برای این حالت نیز به کار می‌آیند. البته ذکر آن مفید است، زیرا حاکی از آن است که این روش برای باقی برج‌ها ادامه

می‌یابد. یعنی پس از استفاده از $\alpha_{۲}$ برای درونیابی مطالع درون برج اول، مقدار $\alpha_{۳}$ که مستقلاً محاسبه می‌شود باید برای پر کردن درون برج دوم به کار رود، و کار به همین قیاس ادامه می‌یابد.

۵. بررسی روش

پیش از اقدام به درک ماهیت این روش، ملاحظهٔ سه مطلب مفید خواهد بود.

۱. درونیابی خطی در نوارهای میانی بی‌مورد است.

۲. زمان‌های طلوع خودشان تفاضلات مرتبهٔ اول توابع مطالع مایل هستند.

۳. این واقعیت که $A(۰^\circ) = ۰$ و این که بنابراین $\alpha_{۱} = A(۳۰^\circ)$ ناشی از تابع نجومی خاصی است که انتخاب شده است. پس در بررسی این روش به عنوان ابزار درون‌یابی کلی کارآمد برای هر تابع هموار، این شرط منتفی است.

با در نظر گرفتن این مطلب، نماد گذاری اصلاح شده‌ای را به کار می‌گیریم. فرض می‌کنیم $y_{.}, y_{۱}, ..., y_{۳n}$ دنباله‌ای متناهی باشد که در آن مقادیر برای زیر مجموعهٔ $y_{.}, y_{۳}, y_{۶}, ..., y_{۳n}$ از قبل معین می شوند.

می‌خواهیم روش بیان شده را برای تعیین مقادیر $y_{۱}, y_{۲}, y_{۴}, y_{۵}, ...$ به کار بریم. فرض می‌کنیم:

$$y_{۳} - y_{.} = \alpha_{۱}, \quad y_{۶} - y_{۳} = \alpha_{۲} \ldots$$

و چون $y_m = A(۱۰^\circ \cdot m)$ برای mهای صحیح چنانکه $۰ \leq m \leq ۳n$، رابطه‌های (۲)، (۳) و (۴) به صورت زیر در می‌آیند:

$$y_{۱} = A(۱۰^\circ) = \frac{۱}{۳}\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸}$$

$$y_{۲} = A(۲۰^\circ) = \frac{۲}{۳}\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸}$$

$$y_{۳} = A(۳۰^\circ) = \alpha_{۱}$$

بنابر این

$$\Delta y_{.} = \frac{۱}{۳}\alpha_{۱} - \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸}$$

$$\Delta y_{۱} = \frac{۱}{۳}\alpha_{۱}$$

و $\Delta y_{۲} = \frac{۱}{۳}\alpha_{۱} + \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸}$ و به علاوه $\Delta_{۲} y_{۱} = \Delta_{۲} y_{۲} = \frac{\Delta\alpha_{۱}}{۱۸} = \frac{\alpha_{۲} - \alpha_{۱}}{۱۸} = \Delta_{۲}$.

این واقعیت که تفاضلات مرتبهٔ دوم ثابتند، به زبان هندسی ثابت می کند که نقاط $y_{.}, y_{۱}, y_{۲}$ و $y_{۳}$ روی یک سهمی واقعند. این سهمی خاص به خاطر سهمی دیگری، که به $\Delta\alpha_{۲}$ بستگی دارد، برای تعیین مقادیر $y_{۴}$ و $y_{۵}$ کنار گذاشته می‌شود. با این همه، سهمی اول را برای سه مرحلهٔ بیشتر ادامه

می‌دهیم. در شکل ۲ و در پائین، نتایج با نمادهای Y نمایش داده می‌شوند. با این کار نتیجه می‌شود:

$$Y_۴ - y_۰ = (y_۳ + \Delta y_۲ + \Delta_۲) - y_۰ = (y_۳ - y_۰) + (\frac{۱}{۳}\alpha_۱ + \Delta_۲) + \Delta_۲ = \frac{۴}{۳}\alpha_۱ + ۲\Delta_۲$$

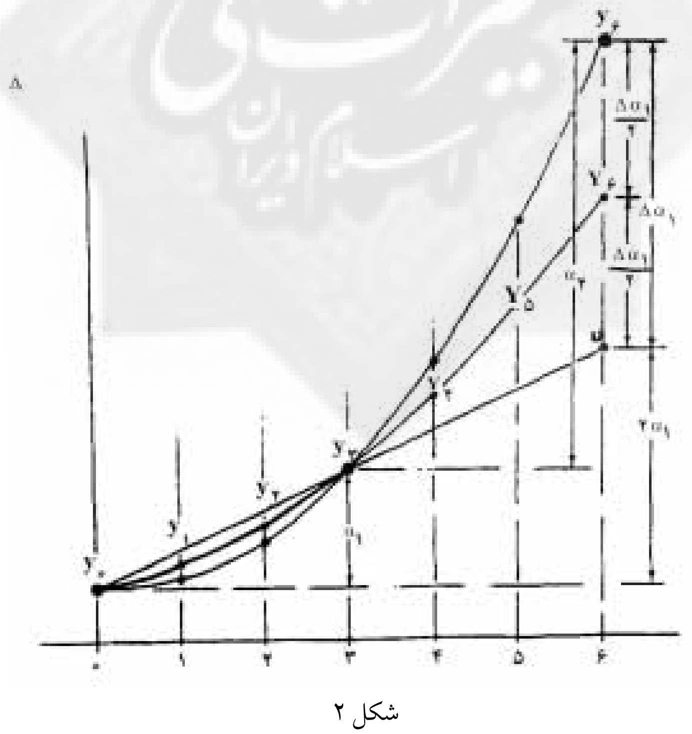
$$Y_۵ - y_۰ = (Y_۴ + \Delta Y_۴) - y_۰ = (Y_۴ - y_۰) + \Delta y_۲ + ۲\Delta_۲$$

$$= \frac{۴}{۳}\alpha_۱ + ۲\Delta_۲ + (\frac{۱}{۳}\alpha_۱ + \Delta_۲) + ۲\Delta_۲ = \frac{۵}{۳}\alpha_۱ + ۵\Delta_۲$$

$$Y_۶ - y_۰ = (Y_۵ + \Delta Y_۵) - y_۰ = (Y_۴ - y_۰) + \Delta y_۲ + ۳\Delta_۲$$

$$= (\frac{۵}{۳}\alpha_۱ + ۵\Delta_۲) + (\frac{۱}{۳}\alpha_۱ + \Delta_۲) + ۳\Delta_۲ = ۲\alpha_۱ + ۹\Delta_۲ = ۲\alpha_۱ + \frac{\Delta\alpha_۱}{۲}$$

به این ترتیب می‌توانیم حدس بزنیم که منطق ابداع کنندهٔ ناشناس این روش چه بوده است. او احتمالاً از درونیابی خطی تنها برای پیدا کردن مقادیر بین $y_۰$ و $y_۳$ استفاده کرده است. در این صورت خط درونیابی خط قائم گذرنده از $y_۶$ را در ۷ قطع می‌کرد، چنان که در شکل ۲ دیده می‌شود. ولی با این کار مقدار معلوم $y_۶$ به کلی نادیده گرفته می‌شود. یا شاید به راه دیگری رفته باشد و از سه نقطهٔ $y_۰, y_۳$ و $y_۶$ یک سهمی گذرانیده باشد. چنین عملیاتی را براهما گوپتا در زیج خندخادیکه (کندکاتک) بیان کرده است.



شکل ۲

ولی با این کار به $y_۶$، که کاملاً خارج از فاصلهٔ مورد نظر قرار می‌گیرد، همان وزنی داده می‌شود

که به نقاط انتهائی بازه، یعنی y_0 و y_3. او در عوض تدبیر نسبتاً ظریف گذراندن یک سهمی را انتخاب می کند که تفاضل دو روش حدی مذکور در بالا را نصف می‌کند. بنابراین به نقطهٔ بیرونی y_6 فقط نیمی از اثر نقاط مرزی انتهایی را می دهد. دلیلی وجود ندارد فرض کنیم که مبتکر این روش مطابق تبیین هندسی ما اندیشیده است، ولی می‌توانیم بپذیریم که او تلویحاً از تعبیر عددی معادل آن آگاه بوده است.

۶. پارامترهای مثال حل شده

به دنبال بند نقل شده در بخش ۳ بالا، مؤلف زیج اشرفی جدولی عددی برای مطالع مایل برای $\varphi = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 30^\circ$ مبتنی بر روش درونیابی بیان شده می‌آورد. او همچنین به سراغ مراحل محاسبهٔ این نتایج می‌رود و فرض می‌کند $\alpha_1 = 21;12^\circ$ و $\alpha_2 = 24;28^\circ$. داده‌های این جدول به شدت آشفته‌اند و در اینجا راهی برای بازسازی آن‌ها وجود ندارد. اما این مقادیر در بررسی درستی تعبیر داده شده در اینجا برای زبان نسبتاً رمزآمیز متن مفید بوده است.

همچنین گفته شده است که مؤلف سرالاسرار مقدار $\varphi = 29;36^\circ$ را برای شهر شیراز به کار برده است. این مقدار ظاهراً درست نقل شده است زیرا این عرض جغرافیائی مذکور برای همان شهر در زیج‌های نصیرالدین طوسی، الغ‌بیگ، محی‌الدین مغربی، و دیگران است. ولی این با عرض جغرافیایی شیراز، که در جدول جغرافیایی زیج اشرفی آمده است، یعنی $29;30^\circ$، تفاوت دارد.