ساخت مربع وفقی به کمک حرکت اسب شطرنج در ریاضیات دورهٔ اسلامی[۱]

ژاک سزیانو[۲]
ترجمهٔ محمد باقری[۳]

مقدمه

یکی از جالب‌ترین، اگر نگوییم بدیع‌ترین، دستاوردهای ریاضیات دورهٔ اسلامی، ابداع روش‌های کلی برای ساختن مربع‌های وفقی است. مربع وفقی مرتبهٔ n، مربعی است که در هر ضلعش n خانه و بنابراین کلاً n^2 خانه دارد که در آن‌ها اعداد طبیعی چنان چیده شده‌اند که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر اصلی برابر عدد ثابت یکسانی است (شکل‌های ۱ و ۲).

۱۲	۳۰	۱۵	۲۲	۳۱	۱
۱۱	۲۹	۲۳	۱۴	۳۲	۲
۱۰	۲۸	۱۳	۲۴	۳۳	۳
۲۷	۹	۲۱	۱۶	۴	۳۴
۲۶	۸	۲۰	۱۷	۵	۳۵
۲۵	۷	۱۹	۱۸	۶	۳۶

شکل ۱

۱	۸	۴۰	۴
۱۴	۲۴	۶	۹
۱۳	۱۸	۵	۱۷
۲۵	۳	۲	۲۳

شکل ۲

این‌ها خواص مربع وفقی «ساده» است. قاعدتاً نخستین n^2 عدد طبیعی را در خانه‌ها می‌چینند، چنان که مجموع ثابت معادل $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ یعنی یک nام مجموع آن‌ها شود. اگر

---

۱. ترجمهٔ مقاله‌ای است با مشخصات زیر:

"Construction of Magic Squares Using the Knight's Move in Islamic Mathematics", *Archives for the History of Exact Sciences*, vol. 58 (2003), pp. 1-20.

علاقه‌مندان به این مطلب می‌توانند مقالهٔ زیر را هم ببینند:

«مسئله‌های ریاضی پیرامون شطرنج از ایران هزار سال پیش و ارتباط آن‌ها با مربع‌های وفقی و نظریهٔ گراف‌ها»، محمد باقری، میراث علمی، سال ۲، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۲ (شمارهٔ پیاپی ۴)، ص ۴۴-۵۲.

2. Jacques Sesiano

۳. سردبیر مجلهٔ میراث علمی، mohammad.bagheri2006@gmail.com

مربع‌های باقی‌مانده پس از هر بار برداشتن خانه‌های مرزی، همچنان وفقی باشند، مربع اولیه «طوق‌دار» خوانده می‌شود[۱] (شکل ۳).

۸۳	۱۶	۸۷	۱۲	۹۱	۸	۹۵	۴	۱۷	۹۲
۲	۶۹	۳۰	۷۳	۲۶	۷۷	۲۲	۳۱	۷۶	۹۹
۱۰۰	۸۱	۵۹	۴۰	۶۳	۳۶	۴۱	۶۴	۲۰	۱
۹۸	۸۲	۳۴	۴۶	۵۱	۴۷	۵۸	۶۷	۱۹	۳
۵	۲۱	۶۸	۴۸	۵۷	۴۵	۵۲	۳۳	۸۰	۹۶
۹۴	۲۳	۶۶	۵۳	۴۴	۵۶	۴۹	۳۵	۷۸	۷
۱۱	۷۴	۳۹	۵۵	۵۰	۵۴	۴۳	۶۲	۲۷	۹۰
۸۸	۲۹	۳۷	۶۱	۳۸	۶۵	۶۰	۴۲	۷۲	۱۳
۱۵	۲۵	۷۱	۲۸	۷۵	۲۴	۷۹	۷۰	۳۲	۸۶
۹	۸۵	۱۴	۸۹	۱۰	۹۳	۶	۹۷	۸۴	۱۸

شکل ۳

اگر هر جفت قطر شکسته (یعنی دو قطر واقع در دو طرف یک قطر اصلی و موازی با آن که مجموعاً n خانه دارند) دارای همان مجموع باشند، مربع وفقی «هم‌قطر» نامیده می‌شود (شکل ۴، که در آن مثلاً مجموع‌های ۸ + ۲۴ + ۱۵ + ۱ + ۱۷ و ۲۴ + ۱۶ + ۱۳ + ۱۰ + ۲ هم با «وفق» مربع یعنی ۶۵ برابرند). مربع‌های وفقی «مرکب» هم داریم: وقتی n، مرتبهٔ مربع، عدد مرکبی باشد، یعنی $n = r.s$، که در آن $r,s \geq ۳$، مربع اصلی را می‌توان به $r^۲$ «زیرمربع» مرتبهٔ s تقسیم کرد؛ این زیرمربع‌ها، مطابق مربع وفقی مرتبهٔ r چیده می‌شوند و با دنباله‌هایی از $s^۲$ عدد پیاپی، بر اساس ترتیب مربع وفقی مرتبهٔ s پر می‌شوند، و حاصل مربعی وفقی خواهد بود که هر زیرمربع آن نیز وفقی است (شکل ۵، که بر پایهٔ مربع‌های وفقی شکل‌های ۶ و ۷ یعنی به ازای $r = ۳$ و $s = ۴$ ساخته شده است).

مربع‌های وفقی را معمولاً بر اساس مرتبه‌شان به سه رده تقسیم می‌کنند: «فرد» وقتی که n فرد باشد، یعنی $n = ۳,۵,۷,...$ و کلاً $n = ۲k + ۱$ که در آن k عددی طبیعی است؛ «زوج الزوج» وقتی که n زوج و بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس $n = ۴,۸,۱۲,...۴k$؛ و سرانجام «زوج الفرد» وقتی n زوج ولی تنها بر ۲ بخش‌پذیر باشد، یعنی $n = ۶,۱۰,۱۴,...,۴k + ۲$. روش‌های گوناگونی برای

۱. در متن‌های عربی آن را «طوق علی طوق» یا «علی طریق التطویق» خوانده‌اند و بوزجانی آن را «منتظمه» نامیده است. ـ م

ساخت مربع‌های وفقی بسته به نوع (ساده، طوق‌دار، هم‌قطر) و رده‌شان وجود دارد. اما روش‌های ساخت مربع‌های «ساده» را برای کوچک‌ترین مرتبه‌های $n = ۳$ و $n = ۴$ که حالت‌های خاص هستند نمی‌توان به کار برد. دستورهای ساخت مربع‌های «طوق‌دار» برای $n \geq ۵$ معتبر است (چون هیچ مربع وفقی مرتبهٔ ۲ با عددهای متفاوت ممکن نیست، مربع طوق‌دار مرتبهٔ ۴ هم وجود ندارد). همچنین، شیوه‌های ساخت مربع‌های «هم‌قطر» با مرتبهٔ فرد را معمولاً برای وقتی که n بر ۳ بخش‌پذیر باشد نمی‌توان مستقیماً به‌کار برد، و هیچ دستوری برای ساخت مربع‌های [هم‌قطر] ردهٔ «زوج الفرد» وجود ندارد، زیرا چنین مربع‌هایی ناممکنند.

۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱
۱۸	۲۲	۱	۱۰	۱۴
۶	۱۵	۱۹	۲۳	۲
۲۴	۳	۷	۱۱	۲۰
۱۲	۱۶	۲۵	۴	۸

شکل ۴

۲۴	۲۷	۳۰	۱۷	۱۳۶	۱۳۹	۱۴۲	۱۲۹	۵۶	۵۹	۶۲	۴۹
۲۹	۱۸	۲۳	۲۸	۱۴۱	۱۳۰	۱۳۵	۱۴۰	۶۱	۵۰	۵۵	۶۰
۱۹	۳۲	۲۵	۲۲	۱۳۱	۱۴۴	۱۳۷	۱۳۴	۵۱	۶۴	۵۷	۵۴
۲۶	۲۱	۲۰	۳۱	۱۳۸	۱۳۳	۱۳۲	۱۴۳	۵۸	۵۳	۵۲	۶۳
۱۰۴	۱۰۷	۱۱۰	۹۷	۷۲	۷۵	۷۸	۶۵	۴۰	۴۳	۴۶	۳۳
۱۰۵	۹۸	۱۰۳	۱۰۸	۷۷	۶۶	۷۱	۷۶	۴۵	۳۴	۳۹	۴۴
۹۹	۱۱۲	۱۰۵	۱۰۲	۶۷	۸۰	۷۳	۷۰	۳۵	۴۸	۴۱	۳۸
۱۰۶	۱۰۱	۱۰۰	۱۱۱	۷۴	۶۹	۶۸	۷۹	۴۲	۳۷	۳۶	۴۷
۸۸	۹۱	۹۴	۸۱	۸	۱۱	۱۴	۱	۱۲۰	۱۲۳	۱۲۶	۱۱۳
۹۳	۸۲	۸۷	۹۲	۱۳	۲	۷	۱۲	۱۲۵	۱۱۴	۱۱۹	۱۲۴
۸۳	۹۶	۸۹	۸۶	۳	۱۶	۹	۶	۱۱۵	۱۲۸	۱۲۱	۱۱۸
۹۰	۸۵	۸۴	۹۵	۱۰	۵	۴	۱۵	۱۲۲	۱۱۷	۱۱۶	۱۲۷

شکل ۵

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۶

۱	۱۴	۱۱	۸
۱۲	۷	۲	۱۳
۶	۹	۱۶	۳
۱۵	۴	۵	۱۰

شکل ۷

دربارهٔ آغاز مطالعهٔ مربع‌های وفقی در دورهٔ اسلامی اطلاعی نداریم. شاید این آغاز با ورود شطرنج به ایران مرتبط باشد. مسئله در اصل صرفاً ریاضی بود و منشأ نام کهن عربی «وفق الاعداد» [که در غرب مربع جادویی خوانده می‌شود] هم همان است. می‌دانیم که در قرن سوم هجری رساله‌هایی در این باره نوشته شد، ولی کهن‌ترین رساله‌های موجود مربوط به قرن چهارم هجری است: یکی رسالهٔ في ترکیب عدد الوفق في المربعات از ابوالوفا بوزجانی (۳۲۸-۳۸۸ق) و دیگری فصلی از مقالهٔ سوم رسالهٔ تفسیر الارثماطیقی (شرح حساب نیکوماخوس) از علی بن احمد انطاکی (و۳۷۶ق) (سزیانو ۱۹۹۸ و ۲۰۰۳). ظاهراً در آن روزگار علم مربع‌های وفقی تثبیت شده بود: شیوهٔ ساخت مربع‌های وفقی «طوق‌دار» از هر مرتبه و همچنین مربع‌های وفقی ساده از مربع‌های کوچک ($n \leq ۶$) را که در ساخت مربع‌های وفقی مرکب به‌کار می‌رفت می‌دانستند.

اگرچه «کاربرد» روش‌های ساخت مربع‌های وفقی ساده آسان‌تر است، «کشف» روش‌های ساخت مربع‌های وفقی طوق‌دار آسان‌تر است. در قرن پنجم هجری روش‌های گوناگونی برای ساخت مربع‌های ساده، البته برای مرتبه‌های فرد و زوج الزوج، یافت شد (بنگرید به دو رساله از مؤلفان ناشناخته، احتمالاً از نیمهٔ اول قرن پنجم هجری، در سزیانو ۱۹۹۶a و ۱۹۹۶b[۱])؛ و حالت دشوارتر $n = ۴k + ۲$ که ابن‌هیثم (حدود ۳۵۴-۴۳۰ق) توانست تنها برای kهای زوج حل کند (سزیانو ۱۹۸۰)، در اوایل قرن ششم هجری یا شاید هم در نیمهٔ دوم قرن پنجم هجری عرضه شد (سزیانو ۱۹۹۵). در همان زمان، مربع‌های مرتبهٔ زوج الزوج و مرتبهٔ فرد که n بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، ساخته می‌شد (ظاهراً به مجموع قطرهای شکسته توجه چندانی نمی‌شد؛ نکتهٔ جالب در این مربع‌ها این بود که خانهٔ مبدأ، یعنی خانهٔ عدد ۱، می‌توانست درون مربع‌ها جابجا شود). در قرن ششم هجری رساله‌های پرشماری دربارهٔ مربع‌های وفقی تألیف شد و آثار بعدی بیشتر در جهت اصلاح یا ساده‌سازی روش‌های موجود بود. از قرن هفتم هجری به بعد، مربع‌های وفقی به عنوان طلسم کاربرد روز افزونی یافتند.

۱. عنوان یکی از این دو رساله که کوتاه‌تر از دیگری است، مختصر في الارشاد الی وفق الاعداد است که نسخهٔ خطی آن به شمارهٔ ۴۸۰۱ در مجموعهٔ ایاصوفیا در کتابخانهٔ سلیمانیهٔ استانبول نگهداری می‌شود. متن عربی این رساله با ترجمهٔ فرانسوی آن را مؤلف مقالهٔ حاضر در منبع (سزیانو a ۱۹۹۶) عرضه کرده است. عنوان رسالهٔ بلندتر إعداد فی وفق الاعداد است. ـ م.

منشأ ارتباط مربع‌های وفقی با طلسم، حروف ابجد بود که در آن هر یک از ۲۸ حرف الفبای عربی با عددی (یکان، دهگان، صدگان و هزارگان) متناظر بود. به این ترتیب با هر نام یا جمله کمیت عددی معینی متناظر می‌شد: پس این فکر مطرح شد که مثلاً در سطر اول، عددهای معادل با هر یک از حروف کلمه یا کلمات جمله را بنویسند؛ سپس جدول را طوری کامل کنند که در هر سطر همان مجموع حاصل شود. اما روش این کار کاملاً متفاوت و وابسته به مرتبهٔ n و مقدار n کمیت مفروض بود. این مسئله از لحاظ ریاضی آسان نیست و در قرن پنجم منجر به روش‌های جالبی برای حالت‌های n=۳ تا n=۸ شد (سزیانو ۱۹۹۶b). چون تنها اندکی از افراد علاقه‌مند به جادو و طلسم ذوق ریاضی داشتند، بیشتر متن‌هایی که برای آن‌ها تدوین می‌شد صرفاً برخی مربع‌های وفقی و خواص آن‌ها را عرضه می‌کرد؛ اما برخی از این متن‌ها نظریهٔ عمومی را زنده نگاه می‌داشتند، از جمله اثر بی‌نظیری نوشتهٔ محمد شُبرامَلِّسی که در قرن یازدهم هجری در مصر می‌زیست. بین مربع‌های وفقی رایج به عنوان طلسم، مربع‌های وفقی ساده‌ای از هفت مرتبهٔ نخست (n=۳ تا n=۹) نیز یافت می‌شود که با نخستین عددهای طبیعی پر می‌شد؛ هر کدام با یکی از جرم‌های آسمانی هفت‌گانهٔ شناخته‌شده متناظر به شمار می‌آمد و دارای خواص و معایب سیارهٔ متناظر با آن بود.

روند انتقال پژوهش‌های دورهٔ اسلامی دربارهٔ مربع‌های وفقی فراز و فرودهایی داشت. تنها در اواخر سده‌های میانه، دو دسته مربع وفقی مرتبط با کاربرد سیارات در متون جادوگری، بدون اشاره‌ای به شیوهٔ ساخت آن‌ها به اروپا راه یافت (به خاطر این منابع، مربع‌های وفقی را در اروپا مربع‌های جادویی و همچنین تا قرن ۱۱ هجری / ۱۷ میلادی مربع‌های سیاره‌ای می‌خواندند). هیچ متن عربی دیگری دربارهٔ مربع‌های وفقی به اروپا راه نیافت و هیچ نشانه‌ای از مطالعه یا کاربرد چنین متنی در آنجا وجود ندارد. به این ترتیب اروپا مدت‌ها از پژوهش‌های دورهٔ اسلامی در این موضوع بی‌خبر ماند و این وضع خیلی طول کشید، زیرا تنها در این اواخر میزان و اهمیت آن در اروپا شناخته شده است. شرق از این لحاظ وضع بهتری داشت. در قرن ششم هجری برخی روش‌های ساخت مربع‌های وفقی به هند و چین رسید؛ اوضاع در بیزانس هم خوب بود و گواه آن رساله ایست که مانوئل موسکوپولس در سال ۱۳۰۰ میلادی (۷۰۰ق) نوشت که ضمناً نخستین رساله از سده‌های میانه درباره مربع‌های وفقی است که در اروپای متأخر شناخته شد (تانری ۱۸۸۶ و سزیانو ۱۹۹۸b).

B	K		K	B
K	Q		Q	K
		x		
K	Q		Q	K
B	K		K	B

شکل ۸

پیشتر به ارتباط احتمالی مربع‌های وفقی و شطرنج اشاره کردیم. در قدیم‌ترین منابع می‌بینیم که در روش‌های گوناگون ساخت مربع‌های ساده و هم‌قطر مرتبهٔ فرد یا زوج الزوج از مهره‌های شطرنج استفاده شده است: عمدتاً حرکت اسب، یعنی حرکتی غیر قطری به صورت دو خانه در یک راستا و یک خانه عمود بر آن و همچنین حرکت وزیر، یعنی حرکت قطری به خانهٔ مجاور. برای کامل کردن برخی مربع‌های زوج الزوج هم مکمل هر عدد نسبت به $n^{۲}+۱$ در خانهٔ متناظر با حرکت فیل [طبق دستور قدیم]، یعنی حرکت قطری به اندازهٔ دو خانه در هر راستا. همهٔ این حرکت‌ها که پیاپی به آن‌ها برمی‌خوریم، در شکل ۸ دیده می‌شود: حول خانهٔ x همهٔ حرکت‌های ممکن اسب (K)، وزیر (Q) و فیل (B) مشخص شده است. در ادامه، برخی روش‌های مبتنی بر این حرکت‌ها به خصوص حرکت اسب، را برای ساخت مربع‌های وفقی مرتبهٔ فرد یا زوج الزوج شرح می‌دهیم.

مربع‌های وفقی مرتبهٔ فرد

- روش اول

در یک مربع خالی مرتبهٔ مورد نظر، اول عدد ۱ را در خانهٔ وسطی سطر بالا بگذارید. سپس به سمت پایین، ستون به ستون حرکت اسب را انجام دهید. وقتی به هر ضلع مربع رسیدید، از ضلع روبه‌رو ادامه دهید (برای تعیین خانهٔ بعدی تصور کنید که مربع روی صفحه تکرار می‌شود). کار را تا نوشتن n عدد دنبال کنید. از این پس دیگر چنین حرکتی ممکن نیست زیرا خانهٔ بعدی پر شده است. حالا n هر چه باشد در همان ستون چهار خانه پایین بروید: این محل شروع n عدد بعدی است. این مراحل را تا کامل شدن مربع ادامه دهید. این روش منجر به ساخت مربع وفقی از هر مرتبهٔ فرد دلخواه می‌شود (شکل‌های ۹ تا ۱۲).

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

شکل ۹

۱۰	۱۸	۱	۱۴	۲۲
۴	۱۲	۲۵	۸	۱۶
۲۳	۶	۱۹	۲	۱۵
۱۷	۵	۱۳	۲۱	۹
۱۱	۲۴	۷	۲۰	۳

شکل ۱۰

- روش دوم

نخستین n عدد را مانند روش قبل بگذارید ولی برای «حرکت جهشی»، تنها یک خانه پایین‌تر بروید. این کار هم مربعی وفقی از مرتبهٔ دلخواه پدید می‌آورد (شکل‌های ۹ و ۱۳ تا ۱۵).

۳۸	۱۴	۳۲	۱	۲۶	۴۴	۲۰
۵	۲۳	۴۸	۱۷	۴۲	۱۱	۲۹
۲۱	۳۹	۸	۳۳	۲	۲۷	۴۵
۳۰	۶	۲۴	۴۹	۱۸	۳۶	۱۲
۴۶	۱۵	۴۰	۹	۳۴	۳	۲۸
۱۳	۳۱	۷	۲۵	۴۳	۱۹	۳۷
۲۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴

شکل ۱۱

۲۶	۵۸	۱۸	۵۰	۱	۴۲	۷۴	۳۴	۶۶
۶	۳۸	۷۹	۳۰	۷۱	۲۲	۶۳	۱۴	۴۶
۶۷	۲۷	۵۹	۱۰	۵۱	۲	۴۳	۷۵	۳۵
۴۷	۷	۳۹	۸۰	۳۱	۷۲	۲۳	۵۵	۱۵
۳۶	۶۸	۱۹	۶۰	۱۱	۵۲	۳	۴۴	۷۶
۱۶	۴۸	۸	۴۰	۸۱	۳۲	۶۴	۲۴	۵۶
۷۷	۲۸	۶۹	۲۰	۶۱	۱۲	۵۳	۴	۴۵
۵۷	۱۷	۴۹	۹	۴۱	۷۳	۳۳	۶۵	۲۵
۳۷	۷۸	۲۹	۷۰	۲۱	۶۲	۱۳	۵۴	۵

شکل ۱۲

توجه

(۱) این دو روش در بسیاری از دست‌نوشته‌های عربی دوره‌های مختلف دیده می‌شود. می‌دانیم که روش اول به امپراتوری بیزانس رسید زیرا در رسالهٔ مانوئل موسکوپولس که ذکرش رفت، آمده است.

(۲) صورت‌های گوناگون دیگری از این دو روش هم در دست‌نوشته‌ها دیده می‌شود. مثلاً خانهٔ شروع اغلب در گوشه است و حرکت جهشی بین دو سری n عددی یک خانه به عقب یا به فاصلهٔ چهار خانه در جهت عمودی یا افقی است. البته مؤلفان در این مورد به ساخت دو مربع نخستین (n=۵ و n=۷) بسنده می‌کردند؛ هر دوی این‌ها وفقی و حتی هم‌قطرند، اما مربع بعدی که از مرتبهٔ ۹ است وفقی نیست و کلاً هر مربعی که به روش اخیر ساخته شود، اگر n به ۳ بخش‌پذیر باشد وفقی نخواهد بود.

۲۳	۱۲	۱	۲۰	۹
۴	۱۸	۷	۲۱	۱۵
۱۰	۲۴	۱۳	۲	۱۶
۱۱	۵	۱۹	۸	۲۲
۱۷	۶	۲۵	۱۴	۳

شکل ۱۳

۴۶	۳۱	۱۶	۱	۴۲	۲۷	۱۲
۵	۳۹	۲۴	۹	۴۳	۳۵	۲۰
۱۳	۴۷	۳۲	۱۷	۲	۳۶	۲۸
۲۱	۶	۴۰	۲۵	۱۰	۴۴	۲۹
۲۲	۱۴	۴۸	۳۳	۱۸	۳	۳۷
۳۰	۱۵	۷	۴۱	۲۶	۱۱	۴۵
۳۸	۲۳	۸	۴۹	۳۴	۱۹	۴

شکل ۱۴

مربع‌های زوج الزوج

- روش اول

دو مربع مرتبهٔ چهار در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ را (که هر دو هم‌قطرند) در نظر بگیرید. روش اصلی ساخت همان است: با عدد ۱ در وسط یا گوشهٔ سطر بالا شروع کنید؛ عدد ۲ را با حرکت اسب در سطر بعدی بگذارید؛ ۳ را با حرکت وزیر در سطر سوم بگذارید؛ ۴ را دوباره با حرکت اسب در سطر آخر بگذارید. حالا همین کار را برای عددهای ۸ تا ۵ با شروع از خانهٔ قرینهٔ محل شروع در سطر بالا تکرار کنید. ترکیب خانه‌هایی که به این صورت پر می‌شود نسبت به محور عمودی متقارن است و به ازای هر خانهٔ پر شده، یک و تنها یک خانهٔ خالی است که به اندازهٔ حرکت فیل از آن فاصله دارد (شکل‌های ۱۸ و ۱۹). برای تعیین عدد مناسب هر خانهٔ خالی باید عدد موجود در خانهٔ متناظرش را از $n^۲ + ۱ = ۱۷$ کم کنیم. پس متناظر خانهٔ ۱، خانهٔ ۱۶ و متناظر خانهٔ ۲، خانهٔ ۱۵ است، الی آخر.

این روش را می‌توان تعمیم داد. مربع خالی مرتبهٔ $n = ۴k$ را به زیرمربع‌های مرتبهٔ ۴ تقسیم می‌کنیم. مانند قبل، از سطر بالا شروع می‌کنیم و در هر زیرمربع دو خانه را انتخاب می‌کنیم، که روی هم $\frac{n}{۲}$ خانه می‌شود؛ البته همهٔ آن‌ها باید خانهٔ میانی یا در گوشه باشند (شکل‌های ۲۰ و ۲۱). نصف این‌ها محل شروع برای نوشتن دنباله‌های n عدد متوالی فزاینده با شروع از ۱و نصف دیگر برای دنباله‌های اعداد متوالی کاهنده با شروع از $\frac{n^۲}{۲}$ خواهند بود. جهت اولین حرکت اسب به آسانی تعیین می‌شود: همیشه باید درون زیرمربعی که خانهٔ شروع در آن است بیفتد. اکنون، مانند مربع مرتبهٔ ۴، با حرکت اسب از هر سطر به سطر بعدی می‌رویم، مگر وقتی که به ضلع مربع اصلی برسیم، که در آنجا یک حرکت وزیر انجام می‌دهیم (یعنی به ستون قبلی، اگر از خانهٔ در گوشه شروع کرده باشیم، و در غیر این صورت به ستون بعدی) و دوباره حرکت‌های اسب را از سر می‌گیریم.

۷۷	۵۸	۳۹	۲۰	۱	۷۲	۵۳	۳۴	۱۵
۶	۶۸	۴۹	۳۰	۱۱	۷۳	۶۳	۴۴	۲۵
۱۶	۷۸	۵۹	۴۰	۲۱	۲	۶۴	۵۴	۳۵
۲۶	۷	۶۹	۵۰	۳۱	۱۲	۷۴	۵۵	۴۵
۳۶	۱۷	۷۹	۶۰	۴۱	۲۲	۳	۶۵	۴۶
۳۷	۲۷	۸	۷۰	۵۱	۳۲	۱۳	۷۵	۵۶
۴۷	۲۸	۱۸	۸۰	۶۱	۴۲	۲۳	۴	۶۶
۵۷	۳۸	۱۹	۹	۷۱	۵۲	۳۳	۱۴	۷۶
۶۷	۴۸	۲۹	۱۰	۸۱	۶۲	۴۳	۲۴	۵

شکل ۱۵

۱۴	۱	۸	۱۱
۷	۱۲	۱۳	۲
۹	۶	۳	۱۶
۴	۱۵	۱۰	۵

شکل ۱۶

۱	۱۴	۱۱	۸
۱۲	۷	۲	۱۳
۶	۹	۱۶	۳
۱۵	۴	۵	۱۰

شکل ۱۷

	●	●	
●			●
	●	●	
●			●

شکل ۱۸

●			●
	●	●	
●			●
	●	●	

شکل ۱۹

	۱	۹			۲۴	۳۲	
۱۰			۲	۳۱			۲۳
	۱۱	۳۰			۳	۲۲	
۲۹			۱۲	۲۱			۴
	۲۸	۲۰			۱۳	۵	
۱۹			۲۷	۶			۱۴
	۱۸	۷			۲۶	۱۵	
۸			۱۷	۱۶			۲۵

شکل ۲۰

وقتی نصف خانه‌ها پر شد، برای پر کردن بقیهٔ خانه‌ها مکمل هر عدد نوشته شده را نسبت به n^2+1 می‌گیریم و در خانهٔ متناظر آن با حرکت فیل در همان زیر مربع می‌نویسیم. (شکل‌های ۲۲ و ۲۳ را که در آن‌ها مکمل به ترتیب نسبت به ۶۵ و ۱۴۵ گرفته می‌شود ببینید). محل شروع جفت‌های مزدوج دنباله‌های فزاینده و کاهنده (یعنی دو دنباله که مجموع جمله‌های اولشان $\frac{n^2}{2}+1$

است) را می‌توانیم خانه‌های متقارن اختیار کنیم (مثل خانه‌های ۱ و ۳۲ یا ۹ و ۲۴ در شکل ۲۰؛ و خانه‌های ۱ و ۷۲ یا ۱۳ و ۶۰ یا ۲۵ و ۴۸ در شکل ۲۱). اما این کار الزامی نیست، چنان که در شکل ۲۴، خانه‌های متقارن سطر بالا با عددهای ۱ و ۶۰، ۴۸ و ۱۳، ۷۲ و ۲۵ پر شده است. ضمناً ساخت مربع وفقی به این روش را می‌توانیم از هر سطری شروع کنیم (شکل ۲۵). از هر جا که شروع کنیم، از آنجا به بعد همان دستورهای پیشین معتبر است.

۱			۱۳	۲۵			۴۸	۶۰			۷۲
	۱۴	۲			۴۷	۲۶			۷۱	۵۹	
۱۵			۴۶	۳			۷۰	۲۷			۵۸
	۴۵	۱۶			۶۹	۴			۵۷	۲۸	
۴۴			۶۸	۱۷			۵۶	۵			۲۹
	۶۷	۴۳			۵۵	۱۸			۳۰	۶	
۶۶			۵۴	۴۲			۳۱	۱۹			۷
	۵۳	۶۵			۳۲	۴۱			۸	۲۰	
۵۲			۳۳	۶۴			۹	۴۰			۲۱
	۳۴	۵۱			۱۰	۶۳			۲۲	۳۹	
۳۵			۱۱	۵۰			۲۳	۶۲			۳۸
	۱۲	۳۶			۲۴	۴۹			۳۷	۶۱	

شکل ۲۱

این روش در رسالهٔ کوتاه‌تر بین دو رسالهٔ مربوط به قرن پنجم هجری از مؤلفان ناشناخته بیان شده است (سزیانو ۱۹۹۶a). مؤلف رساله روشی هم برای امتحان اینکه دنباله‌ها در جای درست قرار گرفته‌اند، پیش از نوشتن اعداد، ذکر می‌کند: نخست، مجموع‌های موجود در همهٔ سطرها باید مساوی باشند؛ دوم، هر ستون باید مجموعی مساوی مجموع ستون بعدی با یک ستون فاصله در همان ستون زیر مربع‌ها داشته باشد[1] (چنان که در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ دیده می‌شود). این کار ضمناً معلوم می‌کند چرا مربع کامل شده وفقی خواهد بود: مجموع مکمل‌ها در هر سطر مساوی بقیهٔ سطرهاست، ولی مجموع مکمل‌ها برای هر ستون از هر جفت ستون مزدوج مساوی با هر جفت دیگر است؛ بنابراین پر کردن خانه‌های فیل مقدار لازم برای رسیدن به عدد وفق را تأمین می‌کند. در

۱. یعنی در هر ستون از زیر مربع‌ها باید مجموع ستون‌های شمارهٔ فرد با هم و مجموع ستون‌های شمارهٔ زوج با هم مساوی باشد، یا مجموع ستون‌ها یکی در میان یکسان باشد. ــ م

واقع، اگر در یک سطر یا ستون ابتدا $\frac{n}{2}$ عدد α_i گذاشته باشیم که مجموعشان $\sum\alpha_i$ بشود، سطر یا ستون مزدوج مکمل‌های آن‌ها را که $(n^2+1)-\alpha_i$ است دریافت می‌کند. چون خانه‌هایی که قبلاً پر شده شامل $\frac{n}{2}$ عدد β_i با مجموع $\sum\alpha_i=\sum\beta_i$ است، مجموع در سطر یا ستون مزدوج برابر خواهد بود با:

$$\sum\beta_i+\frac{n}{2}(n^2+1)-\sum\alpha_i=\frac{n}{2}(n^2+1)$$

که حاصل همان عدد وفق است. سوم، مورد مربوط به قطرها که ساده است: چون مرکب از زوج‌های مکملند، مجموعشان باید $\frac{n}{2}$ ضرب در مقدار n^2+1 بشود.

۳۵	۱	۹	۵۴	۴۳	۲۴	۳۲	۶۲
۱۰	۵۳	۳۶	۲	۳۱	۶۱	۴۴	۲۳
۵۶	۱۱	۳۰	۶۴	۳۳	۳	۲۲	۴۱
۲۹	۶۳	۵۵	۱۲	۲۱	۴۲	۳۴	۴
۵۸	۲۸	۲۰	۴۷	۵۰	۱۳	۵	۳۹
۱۹	۴۸	۵۷	۲۷	۶	۴۰	۴۹	۱۴
۴۵	۱۸	۷	۳۷	۶۰	۲۶	۱۵	۵۲
۸	۳۸	۴۶	۱۷	۱۶	۵۱	۵۹	۲۵

شکل ۲۲

- روش دوم

با دنباله‌هایی که از ۱ و $\frac{n}{2}$ شروع می‌شوند و به‌ترتیب فزاینده و کاهنده‌اند توسط حرکت اسب تا پایان دو سطر اول می‌رویم، سپس با یک حرکت وزیر به دو سطر بعدی می‌رویم و در جهت عکس حرکت می‌کنیم (شکل ۲۶). با ادامهٔ این کار، نیمهٔ اول عددها را وارد می‌کنیم، سپس خانه‌های خالی را با حرکت فیل درون هر زیرمربع مرتبهٔ ۴ با اعداد مکملشان پر می‌کنیم (شکل ۲۷).

این روش، که در رسالهٔ شبراملسی ذکر شده، پیشتر در رسالهٔ بزرگ‌تر بین دو رسالهٔ از مؤلفان ناشناخته مربوط به قرن ۵ هجری نیز آمده است (سزیانو ۱۹۹۶b، ص ۴۵-۴۴ و ۱۹۵-۱۹۶). مؤلف رساله وضعیت‌های گوناگون ممکن برای خانهٔ اول را به تفصیل بررسی کرده است.

- روش سوم

«حرکت اسب در چهار چرخه» عنوانی است که محمد شبراملسی به این روش داده است؛ زیرا در اینجا هر چهار دنبالهٔ شامل $\frac{n^2}{4}$ عدد را با حرکت اسب جایگزین می‌کنیم. ابتدا $\frac{n^2}{4}$ عدد نخست را می‌نویسیم، یعنی از ۱ تا ۴ در شکل ۲۸، از ۱ تا ۱۶ در شکل ۲۹ و از ۱ تا ۳۶ در شکل ۳۰. در این

کار، با حرکت اسب $\frac{n}{۲}$ عدد را در دو سطر اول می‌نویسیم؛ سپس این حرکت را در دو سطر بعد تکرار می‌کنیم ولی این بار با یک خانه جلوتر از ضلع شروع می‌کنیم. وقتی این کار برای تمام مربع

۱	۹۹	۱۳۰	۱۳	۲۵	۷۵	۱۴۲	۴۸	۶۰	۸۷	۱۱۸	۷۲
۱۲۹	۱۴	۲	۱۰۰	۱۴۱	۴۷	۲۶	۷۶	۱۱۷	۷۱	۵۹	۸۸
۱۵	۱۳۲	۱۴۴	۴۶	۳	۹۷	۱۲۰	۷۰	۲۷	۷۳	۸۵	۵۸
۱۴۳	۴۵	۱۶	۱۳۱	۱۱۹	۶۹	۴	۹۸	۸۶	۵۷	۲۸	۷۴
۴۴	۹۱	۷۹	۶۸	۱۷	۱۱۴	۱۰۳	۵۶	۵	۱۳۸	۱۲۶	۲۹
۸۰	۶۷	۴۳	۹۲	۱۰۴	۵۵	۱۸	۱۱۳	۱۲۵	۳۰	۶	۱۳۷
۶۶	۷۷	۱۰۱	۵۴	۴۲	۸۹	۱۲۸	۳۱	۱۹	۱۱۶	۱۴۰	۷
۱۰۲	۵۳	۶۵	۷۸	۱۲۷	۳۲	۴۱	۹۰	۱۳۹	۸	۲۰	۱۱۵
۵۲	۱۳۴	۱۱۰	۳۳	۶۴	۱۲۲	۹۵	۹	۴۰	۱۰۷	۸۳	۲۱
۱۰۹	۳۴	۵۱	۱۳۳	۹۶	۱۰	۶۳	۱۲۱	۸۴	۲۲	۳۹	۱۰۸
۳۵	۱۱۲	۹۳	۱۱	۵۰	۱۳۶	۸۱	۲۳	۶۲	۱۲۴	۱۰۵	۳۸
۹۴	۱۲	۳۶	۱۱۱	۸۲	۲۴	۴۹	۱۳۵	۱۰۶	۳۷	۶۱	۱۲۳

شکل ۲۳

انجام شد، چرخهٔ دوم را انجام می‌دهیم: از آخرین خانهٔ پر شده یکی به عقب می‌رویم و با حرکت اسب در امتداد همان دو سطر باز می‌گردیم؛ و چون شروع حرکت‌ها از یک خانه عقب‌تر از ضلع در سطر آخر است، در دو سطر بعدی، از خانهٔ نخست آغاز می‌کنیم.

اکنون چرخهٔ دوم را همانند روند $\frac{n^۲}{۴}$ عدد اول ولی این بار بـرعکس دو جهـت اول انجـام می‌دهیم. وقتی به خانهٔ مجاور خانهٔ اول رسیدیم، عدد بعدی را، که اولین عـدد چرخـهٔ سـوم است، در سر دیگر قطر شکسته، یعنی بالای آخرین خانه می‌گذاریـم (عـدد ۹ در شـکل ۲۸، عدد ۳۳ در شکل ۲۹ و عدد ۷۳ در شکل ۳۰)؛ سپس مثل قبل با حرکت اسب پیش می‌رویـم و به سمت چپ و بالا حرکت می‌کنیم. وقتی به خانهٔ زیر خانه اول رسیدیم، دوباره بـرای انجـام چرخهٔ چهارم، به خانهٔ مجاور می‌رویم و حرکت‌ها را به راست و پایین ادامه می‌دهیم تا آخرین عدد وارد شود.

۷۵	۶۰	۱۳	۱۳۰	۱۴۲	۲۵	۷۲	۸۷	۹۹	۴۸	۱	۱۱۸
۱۴	۱۲۹	۷۶	۵۹	۷۱	۸۸	۱۴۱	۲۶	۲	۱۱۷	۱۰۰	۴۷
۱۳۲	۱۵	۷۰	۸۵	۷۳	۵۸	۳	۱۲۰	۱۴۴	۲۷	۴۶	۹۷
۶۹	۸۶	۱۳۱	۱۶	۴	۱۱۹	۷۴	۵۷	۴۵	۹۸	۱۴۳	۲۸
۱۰۳	۶۸	۵	۱۳۸	۱۱۴	۱۷	۴۴	۷۹	۹۱	۵۶	۲۹	۱۲۶
۶	۱۳۷	۱۰۴	۶۷	۴۳	۸۰	۱۱۳	۱۸	۳۰	۱۲۵	۹۲	۵۵
۱۴۰	۷	۴۲	۷۷	۱۰۱	۶۶	۳۱	۱۲۸	۱۱۶	۱۹	۵۴	۸۹
۴۱	۷۸	۱۳۹	۸	۳۲	۱۲۷	۱۰۲	۶۵	۵۳	۹۰	۱۱۵	۲۰
۹۵	۴۰	۳۳	۱۱۰	۱۲۲	۹	۵۲	۱۰۷	۸۳	۶۴	۲۱	۱۳۴
۳۴	۱۰۹	۹۶	۳۹	۵۱	۱۰۸	۱۲۱	۱۰	۲۲	۱۳۳	۸۴	۶۳
۱۱۲	۳۵	۵۰	۱۰۵	۹۳	۳۸	۲۳	۱۳۶	۱۲۴	۱۱	۶۲	۸۱
۴۹	۱۰۶	۱۱۱	۳۶	۲۴	۱۳۵	۹۴	۳۷	۶۱	۸۲	۱۲۳	۱۲

شکل ۲۴

۱۴۰	۱۵	۷۰	۷۷	۱۰۱	۵۸	۳	۱۲۸	۱۱۶	۲۷	۴۶	۸۹
۶۹	۷۸	۱۳۹	۱۶	۴	۱۲۷	۱۰۲	۵۷	۴۵	۹۰	۱۱۵	۲۸
۷۵	۶۸	۵	۱۳۰	۱۴۲	۱۷	۴۴	۸۷	۹۹	۵۶	۲۹	۱۱۸
۶	۱۲۹	۷۶	۶۷	۴۳	۸۸	۱۴۱	۱۸	۳۰	۱۱۷	۱۰۰	۵۵
۱۱۲	۷	۴۲	۱۰۵	۹۳	۶۶	۳۱	۱۳۶	۱۲۴	۱۹	۵۴	۸۱
۴۱	۱۰۶	۱۱۱	۸	۳۲	۱۳۵	۹۴	۶۵	۵۳	۸۲	۱۲۳	۲۰
۱۰۳	۴۰	۳۳	۱۳۸	۱۱۴	۹	۵۲	۷۹	۹۱	۶۴	۲۱	۱۲۶
۳۴	۱۳۷	۱۰۴	۳۹	۵۱	۸۰	۱۱۳	۱۰	۲۲	۱۲۵	۹۲	۶۳
۱۳۲	۳۵	۵۰	۸۵	۷۳	۳۸	۲۳	۱۲۰	۱۴۴	۱۱	۶۲	۹۷
۴۹	۸۶	۱۳۱	۳۶	۲۴	۱۱۹	۷۴	۳۷	۶۱	۹۸	۱۴۳	۱۲
۹۵	۶۰	۱۳	۱۱۰	۱۲۲	۲۵	۷۲	۱۰۷	۸۳	۴۸	۱	۱۳۴
۱۴	۱۰۹	۹۶	۵۹	۷۱	۱۰۸	۱۲۱	۲۶	۲	۱۳۳	۸۴	۴۷

شکل ۲۵

دلیل اینکه سطرها و ستون‌ها مجموعاً عدد وفق را ایجاد می‌کنند مانند روش قبلی است. در واقع $\frac{n^{۲}}{۴}$ عددی که در دو چرخهٔ نخست نوشته می‌شوند با حالت قبلی تنها در وضع قرارگیری فرق دارند: نیمی از ستون‌ها، یعنی آن‌ها که قبلاً شمارهٔ فرد داشتند، به همان صورت می‌مانند، و ستون‌های به شمارهٔ زوج $۲i$ حالا به شمارهٔ $n - ۲i + ۲$ هستند؛ پس اعداد سطرها همان خواهند بود ولی ستون‌های مزدوج همان قبلی‌ها می‌مانند. به عبارت دیگر، اعداد دو قطر تغییر خواهند کرد، اما در نهایت همچنان حاوی جفت‌های مکمل خواهند بود.

۱			۶۸	۳			۷۰	۵			۷۲
	۶۷	۲			۶۹	۴			۷۱	۶	
۶۶			۱۱	۶۴			۹	۶۲			۷
	۱۲	۶۵			۱۰	۶۳			۸	۶۱	
۱۳			۵۶	۱۵			۵۸	۱۷			۶۰
	۵۵	۱۴			۵۷	۱۶			۵۹	۱۸	
۵۴			۲۳	۵۲			۲۱	۵۰			۱۹
	۲۴	۵۳			۲۲	۵۱			۲۰	۴۹	
۲۵			۴۴	۲۷			۴۶	۲۹			۴۸
	۴۳	۲۶			۴۵	۲۸			۴۷	۳۰	
۴۲			۳۵	۴۰			۳۳	۳۸			۳۱
	۳۶	۴۱			۳۴	۳۹			۳۲	۳۷	

شکل ۲۶

- روش چهارم

همان مؤلف روش دیگری بیان کرده که آن را «حرکت اسب در دو چرخه» نامیده است. مانند قبل شروع می‌کنیم ولی به جای رفتن به جفت سطر بعدی، پس از رسیدن به خانهٔ آخر، به خانهٔ مجاور می‌رویم و در امتداد همان دو سطر اول برمی‌گردیم. جهش به سطر بعدی مانند روش قبلی است. با این کار در جفت سطر پایانی به عدد $\frac{n^{۲}}{۲}$ می‌رسیم (عدد ۸ در شکل ۳۱ و عدد ۷۲ در شکل ۳۲). ازآنجا با حرکت وزیر به خانهٔ پایینی می‌رویم و حرکت‌ها را در جهت عکس ادامه می‌دهیم. در پایان به خانه‌ای می‌رسیم که با حرکت وزیر به خانهٔ ۱ مربوط است.

۱	۱۳۴	۷۹	۶۸	۳	۱۳۶	۸۱	۷۰	۵	۱۳۸	۸۳	۷۲
۸۰	۶۷	۲	۱۳۳	۸۲	۶۹	۴	۱۳۵	۸۴	۷۱	۶	۱۳۷
۶۶	۷۷	۱۴۴	۱۱	۶۴	۷۵	۱۴۲	۹	۶۲	۷۳	۱۴۰	۷
۱۴۳	۱۲	۶۵	۷۸	۱۴۱	۱۰	۶۳	۷۶	۱۳۹	۸	۶۱	۷۴
۱۳	۱۲۲	۹۱	۵۶	۱۵	۱۲۴	۹۳	۵۸	۱۷	۱۲۶	۹۵	۶۰
۹۲	۵۵	۱۴	۱۲۱	۹۴	۵۷	۱۶	۱۲۳	۹۶	۵۹	۱۸	۱۲۵
۵۴	۸۹	۱۳۲	۲۳	۵۲	۸۷	۱۳۰	۲۱	۵۰	۸۵	۱۲۸	۱۹
۱۳۱	۲۴	۵۳	۹۰	۱۲۹	۲۲	۵۱	۸۸	۱۲۷	۲۰	۴۹	۸۶
۲۵	۱۱۰	۱۰۳	۴۴	۲۷	۱۱۲	۱۰۵	۴۶	۲۹	۱۱۴	۱۰۷	۴۸
۱۰۴	۴۳	۲۶	۱۰۹	۱۰۶	۴۵	۲۸	۱۱۱	۱۰۸	۴۷	۳۰	۱۱۳
۴۲	۱۰۱	۱۲۰	۳۵	۴۰	۹۹	۱۱۸	۳۳	۳۸	۹۷	۱۱۶	۳۱
۱۱۹	۳۶	۴۱	۱۰۲	۱۱۷	۳۴	۳۹	۱۰۰	۱۱۵	۳۲	۳۷	۹۸

شکل ۲۷

۱	۸	۱۱	۱۴
۱۲	۱۳	۲	۷
۶	۳	۱۶	۹
۱۵	۱۰	۵	۴

شکل ۲۸

۱	۳۲	۴۷	۵۰	۳	۳۰	۴۵	۵۲
۴۸	۴۹	۲	۳۱	۴۶	۵۱	۴	۲۹
۲۸	۵	۵۴	۴۳	۲۶	۷	۵۶	۴۱
۵۳	۴۴	۲۷	۶	۵۵	۴۲	۲۵	۸
۹	۲۴	۳۹	۵۸	۱۱	۲۲	۳۷	۶۰
۴۰	۵۷	۱۰	۲۳	۳۸	۵۹	۱۲	۲۱
۲۰	۱۳	۶۲	۳۵	۱۸	۱۵	۶۴	۳۳
۶۱	۳۶	۱۹	۱۴	۶۳	۳۴	۱۷	۱۶

شکل ۲۹

پس از آنکه نیمی از عددها نوشته شد، همهٔ ستون‌ها مجموعی یکسان دارند و اگر جفت ستون‌های مزدوج متوالی را در نظر بگیریم، هر کدام حاوی مکمل ستون مجاور خودند. جفت سطرهای مجاور هم مجموع یکسانی دارند که هر کدام با مکمل‌های موجود در دیگری کامل می‌شود. سرانجام، قطرها هم در نهایت شامل جفت‌های مکمل خواهند بود که این بار در خانه‌های مجاور واقعند.

- روش پنجم

این روش در رسالهٔ بزرگ‌تر بین دو رساله از مؤلفان ناشناخته مربوط به قرن ۵ هجری توصیف شده است (سزیانو b ۱۹۹۶، ص ۶۶-۶۷ و ۱۷۷-۱۷۹). با شروع از ۱ و $n^۲$ در دو سر سطر (مثلاً بالایی، با حرکت اسب دو دنبالهٔ (فزاینده و کاهنده) از $\frac{n}{۲}$ عدد را در دو سطر اول قرار می‌دهیم. سپس این کار را در جفت سطر بعدی تکرار می‌کنیم و در این مرحله، مثل روش سوم، محل آغاز به فاصلهٔ یک خانه از ضلع است. جایگذاری عددها را به همین ترتیب برای هر دستهٔ چهار سطری تا پایین ادامه می‌دهیم تا اولین و آخرین $\frac{n^۲}{۴}$ عدد نوشته شود (عددهای ۱ تا ۴ و ۱۶ تا ۱۳ در شکل ۳۳؛ عددهای ۱ تا ۳۶ و ۱۴۴ تا ۱۰۹ در شکل ۳۴).

۱	۷۲	۱۰۷	۱۱۰	۳	۷۰	۱۰۵	۱۱۲	۵	۶۸	۱۰۳	۱۱۴
۱۰۸	۱۰۹	۲	۷۱	۱۰۶	۱۱۱	۴	۶۹	۱۰۴	۱۱۳	۶	۶۷
۶۶	۷	۱۱۶	۱۰۱	۶۴	۹	۱۱۸	۹۹	۶۲	۱۱	۱۲۰	۹۷
۱۱۵	۱۰۲	۶۵	۸	۱۱۷	۱۰۰	۶۳	۱۰	۱۱۹	۹۸	۶۱	۱۲
۱۳	۶۰	۹۵	۱۲۲	۱۵	۵۸	۹۳	۱۲۴	۱۷	۵۶	۹۱	۱۲۶
۹۶	۱۲۱	۱۴	۵۹	۹۴	۱۲۳	۱۶	۵۷	۹۲	۱۲۵	۱۸	۵۵
۵۴	۱۹	۱۲۸	۸۹	۵۲	۲۱	۱۳۰	۸۷	۵۰	۲۳	۱۳۲	۸۵
۱۲۷	۹۰	۵۳	۲۰	۱۲۹	۸۸	۵۱	۲۲	۱۳۱	۸۶	۴۹	۲۴
۲۵	۴۸	۸۳	۱۳۴	۲۷	۴۶	۸۱	۱۳۶	۲۹	۴۴	۷۹	۱۳۸
۸۴	۱۳۳	۲۶	۴۷	۸۲	۱۳۵	۲۸	۴۵	۸۰	۱۳۷	۳۰	۴۳
۴۲	۳۱	۱۴۰	۷۷	۴۰	۳۳	۱۴۲	۷۵	۳۸	۳۵	۱۴۴	۷۳
۱۳۹	۷۸	۴۱	۳۲	۱۴۱	۷۶	۳۹	۳۴	۱۴۳	۷۴	۳۷	۳۶

شکل ۳۰

۱۵	۱۴	۴	۱
۳	۲	۱۶	۱۳
۱۰	۱۱	۵	۸
۶	۷	۹	۱۲

شکل ۳۱

۱۳۹	۱۳۸	۸	۵	۱۴۱	۱۳۶	۱۰	۳	۱۴۳	۱۳۴	۱۲	۱
۷	۶	۱۴۰	۱۳۷	۹	۴	۱۴۲	۱۳۵	۱۱	۲	۱۴۴	۱۳۳
۱۲۶	۱۲۷	۱۷	۲۰	۱۲۴	۱۲۹	۱۵	۲۲	۱۲۲	۱۳۱	۱۳	۲۴
۱۸	۱۹	۱۲۵	۱۲۸	۱۶	۲۱	۱۲۳	۱۳۰	۱۴	۲۳	۱۲۱	۱۳۲
۱۱۵	۱۱۴	۳۲	۲۹	۱۱۷	۱۱۲	۳۴	۲۷	۱۱۹	۱۱۰	۳۶	۲۵
۳۱	۳۰	۱۱۶	۱۱۳	۳۳	۲۸	۱۱۸	۱۱۱	۳۵	۲۶	۱۲۰	۱۰۹
۱۰۲	۱۰۳	۴۱	۴۴	۱۰۰	۱۰۵	۳۹	۴۶	۹۸	۱۰۷	۳۷	۴۸
۴۲	۴۳	۱۰۱	۱۰۴	۴۰	۴۵	۹۹	۱۰۶	۳۸	۴۷	۹۷	۱۰۸
۹۱	۹۰	۵۶	۵۳	۹۳	۸۸	۵۸	۵۱	۹۵	۸۶	۶۰	۴۹
۵۵	۵۴	۹۲	۸۹	۵۷	۵۲	۹۴	۸۷	۵۹	۵۰	۹۶	۸۵
۷۸	۷۹	۶۵	۶۸	۷۶	۸۱	۶۳	۷۰	۷۴	۸۳	۶۱	۷۲
۶۶	۶۷	۷۷	۸۰	۶۴	۶۹	۷۵	۸۲	۶۲	۷۱	۷۳	۸۴

شکل ۳۲

۱۶			۱
	۲	۱۵	
	۱۴	۳	
۴			۱۳

شکل ۳۳

سپس بقیهٔ عددها را، نه با حرکت اسب، بلکه در امتداد هر قطر شکسته مطابق پیکان‌های شکل‌های ۳۵ و ۳۶ وارد می‌کنیم. ابتدا در ستونی که متوقف شده بودیم به دنبالهٔ فزاینده برمی‌گردیم (به ترتیب ۵ و ۳۷ در دو مثال اخیر)، ولی حالا محل شروع خانهٔ سوم از بالاست و خانه‌های خالی قطر شکستهٔ متناظر را پر می‌کنیم. این کار را برای قطرهای شکستهٔ بعدی تکرار می‌کنیم و هر بار از دو خانهٔ پایین‌تر آغاز می‌کنیم. به این ترتیب نخستین خانهٔ پر شده متناوباً در ستون اول و دوم است. این کار ما را به بالای جدول برمی‌گرداند. در این روند، دنباله‌های ۵، ۶ و ۷، ۸ در شکل ۳۵، و ۳۷ تا

۴۲، ۴۳ تا ۴۸، ۴۹ تا ۵۴، ۵۵ تا ۶۰، ۶۱ تـا ۶۶ و ۶۷ تـا ۷۲ در شـکل ۳۶ را وارد مـی‌کنیم. در پایان، بقیهٔ $\frac{n^۲}{۴}$ عدد را در امتداد قطرهای صعودی متناظر می‌نویسیم (با شروع از ۱۲ در شکل ۳۵ و از ۱۰۸ در شکل ۳۶).

این روش به دلایلی که در پی می‌آید منجر به ساخت مربع وفقی می‌شود. مجموع اعداد سطرها مقدار مورد نظر خواهد بود، زیرا هر سطر شامل جفت‌های مکمل (در خانـه‌های قرینـهٔ یکـدیگر) است. ستون‌ها شامل $\frac{n}{۴}$ تصاعد حسابی، هر یک دارای $\frac{n}{۴}$ جمله‌اند، یعنی اگر i نشانهٔ هـر یـک از عددهای ۱ تا n باشد و t مساوی اعداد طبیعی ۱ تا $\frac{n}{۴}$ باشد،

$$i+(t-۱)n$$
$$(\frac{n^۲}{۲}-i+۱)-(t-۱)n$$
$$(\frac{n^۲}{۲}+n-i+۱)+(t-۱)n$$
$$(n^۲-n+i)-(t-۱)n$$

که مجموع هر یک برای i ثابت منجر به عدد وفق می‌شود. سرانجام، قطر اصلی نزولـی را در نظـر بگیرید. این قطر با عددهای متعلق به تصاعدهای حسابی زیر پر شده است:

$$۱+s(\frac{n}{۲}+۱)$$
$$n^۲-s'(\frac{n}{۲}-۱)$$

که در اینجا $s=۰,۱,...,\frac{n}{۲}-۱$ و $s'=۱,۲,...,\frac{n}{۲}$. پس مجموع n عدد متعلق بـه ایـن دو تصـاعد برابر خواهد بود با :

$$۱\times\frac{n}{۲}+\frac{n}{۲}(\frac{n}{۲}-۱)(\frac{n}{۲}+۱)+n^۲\times\frac{n}{۲}-\frac{n}{۲}(\frac{n}{۲}+۱)(\frac{n}{۲}-۱)=\frac{n}{۲}(n^۲+۱)$$

قطر اصلی دیگر هم، چون حاوی مکمل‌هاست، همان عدد وفق را حاصل می‌کند. شکل ۳۷ به خواننده کمک می‌کند که با روش اخیر بهتر آشنا شود.

همهٔ این روش‌ها را با تبیین خاصیت وفقی عرضه کردیم. امـا بیشـتر متن‌هـای عربـی توضـیح نمی‌دهند چرا مربـع حاصـل از هـر روش خاصـیت وفقـی خواهـد داشـت (اسـتثناهایی در آثـار ریاضی‌دانان، مثلاً ابوالوفا و ابن‌هیثم، وجود دارد). پس روشن اسـت کـه کشـف بسـیاری از ایـن روش‌ها تجربی بوده که در آن زمان کلی تصور شده است (بنگرید به آنچه زیر عنوان توجه به شمارهٔ ۲ در پایان فصل مربوط به مربع‌های وفقی مرتبهٔ فرد آمده است). با این حال در جای دیگر، شواهد مشخصی وجود دارد حاکی از مبنای نظری روش‌های ساخت مربع‌های وفقی، مانند روش اولی که

برای مربع‌های زوج الزوج عرضه شده است (ولو آنکه خاصیت وفقی بعد از کشف روش اثبات شده باشد). در هر صورت این کشف‌ها چه نظری و چه تجربی باشند، حاصل میزان شگفت‌انگیزی از پژوهش هستند که تنها می‌تواند تحسین ما را برانگیزد.

۱			۱۴۰	۳			۱۴۲	۵			۱۴۴
	۱۳۹	۲			۱۴۱	۴			۱۴۳	۶	
	۷	۱۳۴			۹	۱۳۶			۱۱	۱۳۸	
۱۳۳			۸	۱۳۵			۱۰	۱۳۷			۱۲
۱۳			۱۲۸	۱۵			۱۳۰	۱۷			۱۳۲
	۱۲۷	۱۴			۱۲۹	۱۶			۱۳۱	۱۸	
	۱۹	۱۲۲			۲۱	۱۲۴			۲۳	۱۲۶	
۱۲۱			۲۰	۱۲۳			۲۲	۱۲۵			۲۴
۲۵			۱۱۶	۲۷			۱۱۸	۲۹			۱۲۰
	۱۱۵	۲۶			۱۱۷	۲۸			۱۱۹	۳۰	
	۳۱	۱۱۰			۳۳	۱۱۲			۳۵	۱۱۴	
۱۰۹			۳۲	۱۱۱			۳۴	۱۱۳			۳۶

شکل ۳۴

۱	۶	۱۱	۱۶
۸	۱۵	۲	۹
۱۲	۳	۱۴	۵
۱۳	۱۰	۷	۴

شکل ۳۵

۱	۶۶	۱۰۷	۱۴۰	۳	۵۲	۹۳	۱۴۲	۵	۳۸	۷۹	۱۴۴
۷۲	۱۳۹	۲	۱۰۱	۵۸	۱۴۱	۴	۸۷	۴۴	۱۴۳	۶	۷۳
۱۰۸	۷	۱۳۴	۶۵	۹۴	۹	۱۳۶	۵۱	۸۰	۱۱	۱۳۸	۳۷
۱۳۳	۱۰۲	۷۱	۸	۱۳۵	۸۸	۵۷	۱۰	۱۳۷	۷۴	۴۳	۱۲
۱۳	۴۲	۹۵	۱۲۸	۱۵	۶۴	۸۱	۱۳۰	۱۷	۵۰	۱۰۳	۱۳۲
۴۸	۱۲۷	۱۴	۸۹	۷۰	۱۲۹	۱۶	۷۵	۵۶	۱۳۱	۱۸	۹۷
۹۶	۱۹	۱۲۲	۴۱	۸۲	۲۱	۱۲۴	۶۳	۱۰۴	۲۳	۱۲۶	۴۹
۱۲۱	۹۰	۴۷	۲۰	۱۲۳	۷۶	۶۹	۲۲	۱۲۵	۹۸	۵۵	۲۴
۲۵	۵۴	۸۳	۱۱۶	۲۷	۴۰	۱۰۵	۱۱۸	۲۹	۶۲	۹۱	۱۲۰
۶۰	۱۱۵	۲۶	۷۷	۴۶	۱۱۷	۲۸	۹۹	۶۸	۱۱۹	۳۰	۸۵
۸۴	۳۱	۱۱۰	۵۳	۱۰۶	۳۳	۱۱۲	۳۹	۹۲	۳۵	۱۱۴	۶۱
۱۰۹	۷۸	۵۹	۳۲	۱۱۱	۱۰۰	۴۵	۳۴	۱۱۳	۸۶	۶۷	۳۶

شکل ۳۶

۱	۱۲۰	۱۹۱	۲۵۰	۳	۱۰۲	۱۷۳	۲۵۲	۵	۸۴	۱۵۵	۲۵۴	۷	۶۶	۱۳۷	۲۵۶
۱۲۸	۲۴۹	۲	۱۸۳	۱۱۰	۲۵۱	۴	۱۶۵	۹۲	۲۵۳	۶	۱۴۷	۷۴	۲۵۵	۸	۱۲۹
۱۹۲	۹	۲۴۲	۱۱۹	۱۷۴	۱۱	۲۴۴	۱۰۱	۱۵۶	۱۳	۲۴۶	۸۳	۱۳۸	۱۵	۲۴۸	۶۵
۲۴۱	۱۸۴	۱۲۷	۱۰	۲۴۳	۱۶۶	۱۰۹	۱۲	۲۴۵	۱۴۸	۹۱	۱۴	۲۴۷	۱۳۰	۷۳	۱۶
۱۷	۷۲	۱۷۵	۲۳۴	۱۹	۱۱۸	۱۵۷	۲۳۶	۲۱	۱۰۰	۱۳۹	۲۳۸	۲۳	۸۲	۱۸۵	۲۴۰
۸۰	۲۳۳	۱۸	۱۶۷	۱۲۶	۲۳۵	۲۰	۱۴۹	۱۰۸	۲۳۷	۲۲	۱۳۱	۹۰	۲۳۹	۲۴	۱۷۷
۱۷۶	۲۵	۲۲۶	۷۱	۱۵۸	۲۷	۲۲۸	۱۱۷	۱۴۰	۲۹	۲۳۰	۹۹	۱۸۶	۳۱	۲۳۲	۸۱
۲۲۵	۱۶۸	۷۹	۲۶	۲۲۷	۱۵۰	۱۲۵	۲۸	۲۲۹	۱۳۲	۱۰۷	۳۰	۲۳۱	۱۷۸	۸۹	۳۲
۳۳	۸۸	۱۵۹	۲۱۸	۳۵	۷۰	۱۴۱	۲۲۰	۳۷	۱۱۶	۱۸۷	۲۲۲	۳۹	۹۸	۱۶۹	۲۲۴
۹۶	۲۱۷	۳۴	۱۵۱	۷۸	۲۱۹	۳۶	۱۳۳	۱۲۴	۲۲۱	۳۸	۱۷۹	۱۰۶	۲۲۳	۴۰	۱۶۱
۱۶۰	۴۱	۲۱۰	۸۷	۱۴۲	۴۳	۲۱۲	۶۹	۱۸۸	۴۵	۲۱۴	۱۱۵	۱۷۰	۴۷	۲۱۶	۹۷
۲۰۹	۱۵۲	۹۵	۴۲	۲۱۱	۱۳۴	۷۷	۴۴	۲۱۳	۱۸۰	۱۲۳	۴۶	۲۱۵	۱۶۲	۱۰۵	۴۸
۴۹	۱۰۴	۱۴۳	۲۰۲	۵۱	۸۶	۱۸۹	۲۰۴	۵۳	۶۸	۱۷۱	۲۰۶	۵۵	۱۱۴	۱۵۳	۲۰۸
۱۱۲	۲۰۱	۵۰	۱۳۵	۹۴	۲۰۳	۵۲	۱۸۱	۷۶	۲۰۵	۵۴	۱۶۳	۱۲۲	۲۰۷	۵۶	۱۴۵
۱۴۴	۵۷	۱۹۴	۱۰۳	۱۹۰	۵۹	۱۹۶	۸۵	۱۷۲	۶۱	۱۹۸	۶۷	۱۵۴	۶۳	۲۰۰	۱۱۳
۱۹۳	۱۳۶	۱۱۱	۵۸	۱۹۵	۱۸۲	۹۳	۶۰	۱۹۷	۱۶۴	۷۵	۶۲	۱۹۹	۱۴۶	۱۲۱	۶۴

شکل ۳۷

منابع:

محمد شبراملسی، طوالع الاشراق فی وضع الاوفاق، نسخهٔ عربی شمارهٔ ۲۶۹۸ کتابخانهٔ ملی پاریس.

Sesiano, J. 1980. Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit, I. *Sudhoffs Archiv* 44, pp. 187–196.

Sesiano, J. 1995. Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit, III. *Sudhoffs Archiv* 79, pp. 193–226.

Sesiano, J. 1996a. "L'*Abrégé enseignant la disposition harmonieuse des nombres*, un manuscript arabe anonyme sur la construction des carrés magiques". In: *De Bagdad a Barcelona, Estudios sobre historia de las ciencias exactas*, J. Casulleras&J. Samsó, Edd., pp. 103–157. Barcelona: Instituto "Millás Vallicrosa" de Historia de la Ciencia Arabe.

Sesiano, J. 1996b. *Un traité médiéval sur les carrés magiques*. Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes.

Sesiano, J. 1998a. Le traité d'Abū'l-Wafā' sur les carrés magiques. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 12, pp. 121–244.

Sesiano, J. 1998b. Les carrés magiques de Manuel Moschopoulos. *Archive for History of Exact Sciences* 53, pp. 377–397.

Sesiano, J. 2003. Quadratus mirabilis. In: *The Enterprise of Science in Islam: New Perspectives* (edd. J. Hogendijk & A. Sabra, Cambridge Mass.: The MIT Press), pp. 195–229.

Tannery, P. 1886. Le traité de Manuel Moschopoulos sur les carrés magiques. *Annuaire de l'Association pour l'encouragement des études grecques en France*, 88–118. (Reprinted inTannery's *Mémoires scientifiques*, IV (1920), pp. 27–60.)